

Carnot

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

А. А. Агола, С. И. Вавилова, М. Я. Выгодского,
Б. М. Гессена, М. Л. Левина, А. А. Максимова,
А. А. Михайлова, И. И. Роцена и А. Я. Хинчина



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933 — ЛЕНИНГРАД

LASARE NICOLAS MARGUERITE CARNOT

REFLEXIONS SUR LA METAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITESIMAL

ЛАЗАРЬ КАРНО

РАЗМЫШЛЕНИЯ О МЕТАФИЗИКЕ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

Перевод Н. М. Соловьева

Редакция и вступительная статья

А. П. Юшкевича

Очерк жизни Л. Карно

М. Э. Подгорного

Переплет, форзац, суперобложка и графическая орнаментация художника Н. М. ЛОБАНОВА. Гравюры на дереве работы художника А. Н. ПАВЛОВА

Редакционную работу по этой книге провел А. П. ЮШКЕВИЧ
Оформление О. Н. ПЕРСИЯНИНОВОЙ
Корректор А. Х. АРТЮХОВА
Наблюдала за выпуском
О. И. МОРОЗОВА

Рукопись сдана в производство 22/IV 1932 г., листы подписаны к печати в мае 1933 г., книга вышла в свет в июле 1933 г. в количестве 3000 экз. на бумаге формата 73×104/32, печатных знаков в листе 755 000, листов в книге 11. Заказ № 5389 ГТТИ № 273. Уполномоченный Главлита № В — 39583.

Фабрика книги «Красный пролетарий» Издательства ЦК ВКП(б) Партиздата
Москва, Краснопролетарская, 16.

ИДЕИ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ВОСЕМНАДЦАТОМ ВЕКЕ



ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ
А. П. ЮШКЕВИЧА

1

Математики XVII в. передали в наследство своим последователям богатейшие открытия. В ту эпоху заложены были основы новой отрасли математики, разработка которой заняла и до сих пор занимает умы многочисленных ученых. Начиная с Кеплера и Кавальери, впервые после перерыва в 1800 лет применивших в геометрии идеи бесконечного, продолжая работами Ферма, Декарта, Паскаля, Торичелли, Валлиса, Барроу и многих других, математические исследования направляются по новому руслу. Первоначальное завершение неустанной деятельности этих пионеров бесконечного было дано в конце XVII в. Ньютоном и Лейбницем.

Здесь нет необходимости останавливаться на практических результатах, полученных в области математики этими гениальными учеными. Достаточно напомнить, что они и их ближайшие ученики и товарищи — особенно братья Бернулли — в той или иной форме выковывают понятия производной, диференциала и интеграла, вычисляют их для простей-

ших выражений и функций, дают разложения функций в ряды и применяют найденные ими алгорифмы к решению геометрических, механических, астрономических и оптических задач. Стоит, например, перелистать первый печатный курс диференциального исчисления, написанный Лопиталем и вышедший в 1696 г., — и вы найдете там диференциалы произведения, частного, степени и корня, определение касательных и нормалей, ряд интересных задач на maxima и minima, раскрытие неопределенностей и другие основные вещи, встречающиеся в первых главах современных учебников, — хотя, с другой стороны, ряд элементарных разделов там отсутствует[1]. А в первой книге по интегральному исчислению приводятся способы вычисления разнообразных интегралов, квадратуры площадей, спрямление кривых линий, простейшие диференциальные уравнения, соприкасающиеся круги, обвертки и ряд механических и оптических приложений[2].

Новые методы применения идеи бесконечного сразу же получили широкое распространение. Ими, разумеется, не легко было овладеть, но тот, кто уже усвоил их, получал ключ к сокровищнице, полной неисчерпаемого богатства новых открытий. Характернейшими отличиями алгорифмов Лейбница и Ньютона от замененных ими старых приемов были их глубокая систематичность, удобная символика и сравни-

---

[1] Analyse des infiniment petits, par M. le Marquis de l'Hospital. Талантливый математик, Лопиталь обучался у Иоганна Бернулли-младшего. Его «Анализ» в значительной части заимствован из рукописного курса его учителя, недавно лишь обнаруженного среди манускриптов Базельской университетской библиотеки. Эта рукопись опубликована на немецком языке в серии классиков Оствальда (Joh. Bernoulli, Die Differentialrechnung, «Ostw. Klassiker», № 211). Лопиталь сам указывает, что очень многим обязан братьям Бернулли и Лейбницу, не говоря, однако, чем именно.

[2] Joh. Bernoulli, Lectiones mathematicae de methodo integralium и т. д. (Выдержки из этого труда опубликованы на немецком языке под названием: Die erste Integralrechnung, «Ostw. Klassiker», № 194.) Изданные только в 1742 г., эти лекции были написаны в 90-х годах XVII в.

тельно легкая выполнимость действий. На первых порах эти методы позволяли чуть ли не механически изобретать новые теоремы и решать новые задачи из числа более простых и находящихся, так сказать, на поверхности математики. Это обстоятельство и наряду с ним значительные научно-практические приложения диференциального и интегрального исчислений, естественно стимулировали ученых безустанно рваться вперед в погоне за очередными достижениями. Математика XVIII в. отличается поэтому исключительной быстротой развития, кипучестью оригинальных идей и изобилием открытий. Этот бурный расцвет практического исчисления бесконечно-малых не сопровождался, однако, вначале интенсивным развитием его логических основ. Упоенные идеей бесконечного и раскрывавшимися благодаря ей необозримыми горизонтами для творческой деятельности, математики XVII и частью XVIII в. не проявляли чрезмерной заботливости по части строгого обоснования применявшихся методов. Разумеется, сказанного нельзя отнести ко всем и не следует понимать абсолютно. Имелись исключения, и, как будет видно, не только индивидуальные. Но огромное большинство, увлеченное эксплоатацией новых идей, не задумывалось над их теоретическим оправданием, стремясь лишь извлечь максимальный непосредственный эффект. Справедливость принципов достаточно подтверждалась в их глазах справедливостью полученных результатов. До кропотливого ли построения системы исходных постулатов было, когда одно блестящее открытие следовало за другим, а механика ставила перед математиками все новые и новые задачи! Не было и достаточных данных для успешности такого построения, которое является лишь второй стадией в истории науки, следующей за «первоначальным накоплением» материала.

Если обратиться к высказываниям ученых того времени и рассмотреть способы их доказательств, то очевидным станет факт, что в течение ряда десятилетий дело с обоснованием анализа обстояло в целом неблагополучно.

2

Как известно, математики XVIII в. разделились на две крупные школы. Англичане долгое время, до 20—30-х годов прошлого столетия, придерживались, в общем, ньютонова метода флюксий и пределов. Символика же и основные понятия ученых континента принадлежали Лейбницу и братьям Бернулли. Лишь в середине XVIII в., в эпоху великой энциклопедии, некоторые идеи Ньютона проникают во Францию. Изложение воззрений этих двух школ следует поэтому дать отдельно.

Анализ школы Лейбница — это в первую очередь наука о бесконечном и даже о бесконечностях [1]. «Обыкновенный анализ, — пишет Лопиталь, — имеет дело только с конечными величинами; излагаемый же в этой книге проникает в самую бесконечность. Он сравнивает между собой бесконечно малые разности конечных величин, он находит отношения этих разностей и тем самым позволяет открыть отношения величин конечных, которые в сравнении с бесконечно малыми сами как бы являются бесконечными. Можно сказать даже, что этот анализ выходит за пределы бесконечного, ибо он не ограничивается бесконечно малыми разностями, а определяет отношения разностей этих разностей, отношения третьих, четвертых разностей, и т. д., не останавливаясь при этом нигде. Таким образом он обнимает не только бесконечность, но и бесконечность бесконечности или бесконечность бесконечностей» [2].

Что собой представляют бесконечность и бесконечно-малое, Лопиталь не объясняет. Для него — это достаточно ясные

---

[1] Для изложения концепции школы Лейбница я выбрал книгу Лопиталя, отражающую взгляды этой группы не хуже, чем несистематизированные высказывания самого Лейбница; впрочем, параллельно я привожу и собственные высказывания Лейбница.

[2] «Analyse des infiniment petits», 3-е издание 1768 г., стр. XVII—XVIII. Бесконечно малая разность — это диференциал.

понятия, так же как и бесконечность бесконечности и бесконечно малая разность бесконечно малой разности[1]. Лопиталь и не задерживается на них, а пишет: «Только такого рода анализ позволяет понять истинные принципы кривых, ибо кривые линии суть не что иное, как многоугольники с бесконечным количеством сторон». «И, собственно говоря, — продолжает он, — вписанные или описанные вокруг кривых многоугольники, сливающиеся с кривыми при бесконечном увеличении числа их сторон, всегда принимались за самые кривые»[2].

Из приведенной цитаты можно усмотреть вторую существенную черту анализа лейбницианцев. Кривая, оказывается, совпадает с некоторым многоугольником, стороны которого, хотя и бесконечно малые, но все же прямые. Это предложение имело исключительное значение для тогдашнего исчисления бесконечно-малых (да не утратило его и теперь). И Лопиталь, излагая в первой главе своей книги основные определения и идеи, в качестве одного из двух постулатов (demande) выставляет следующий: «Требуется, чтобы кривую линию можно было рассматривать как совокупность бесконечного числа бесконечно малых прямых или (что то же самое) как многоугольник с бесконечным числом бесконечно

---

[1] У самого Лейбница можно найти, например, такие слова: «Я рассматриваю инфинитезимальные величины не как ничто, ни даже как строгие бесконечно-малые (в смысле неделимых. — *А. Ю.*), а как несравнимо (incomparablement) или неопределенно (indefiniment) малые, меньшие, чем величины, разностью которых они служат, более чем на какую-либо данную, или указанную (assignable) величину. В результате этого ошибка (при вычислениях.— *А. Ю.*) будет меньше любой указанной (assignable) ошибки и, следовательно, она будет равна нулю» (в письме к Турнемиру от 28 октября 1714 г.). Не слишком ясное определение и совсем неясное умозаключение. Ведь все же несравнимо малая не есть нуль. Любопытно отметить, что некоторые ученые, например Ньювентиит (Nieuwentijt, в 1694 г.), принимая бесконечно-малые первого порядка, отвергали все же бесконечно-малые высших порядков

[2] «Analyse des infiniment petits», стр. XVIII.

малых сторон, определяющих образуемыми ими углами кривизну линий». При этом допущении бесконечно малые криволинейные треугольники также будут приниматься за прямолинейные, касательные окажутся продолжением сторон многоугольника, составляющего кривую, т. е. секущими, и т. д.[1].

Постулат замены отрезка кривой прямолинейным отрезком тесно связан с другим общим принципом анализа, согласно которому конечная величина a в сумме с бесконечно малой α остается равной себе самой, т. е. согласно которому $a+\alpha=a$. Этот принцип выражен у Лопиталя в следующем постулате: «Требуется, чтобы любую из двух величин, отличающихся лишь на бесконечно малую величину, можно было принимать без различия за другую или (что то же самое) чтобы величина, увеличенная или уменьшенная на другую бесконечно малую величину, могла быть рассматриваема как неизменившаяся»[2].

---

[1] Там же, стр. 3. Эти положения Лопиталя почти дословно совпадают с тем, что говорится у Лейбница: «...найти касательную — то же, что провести прямую, соединяющую две бесконечно близкие точки кривой, или же прямую, являющуюся продолженной стороной бесконечноугольного многоугольника, эквивалентного для нас этой кривой» (из «Nova methodus etc.», статьи от 1684 г.). Представление об элементе кривой как о прямом отрезке имеется у Лейбница с начала его математической карьеры. Изучая Паскаля, Лейбниц встретился у него с треугольником из малой дуги кривой и отрезков, параллельных, как сказали бы мы, осям координат. Этот бесконечно малый криволинейный треугольник Лейбниц рассматривал как прямолинейный и назвал его «характеристическим», так как он служит характеристическим элементом кривой. Сравнение этого бесконечно малого, не могущего быть указанным (inassignable) треугольника с подобным ему треугольником, составленным отрезками касательной, подкасательной и ординатой, позволяет, как известно, решать многообразные задачи.

[2] Там же, стр. 2—3. У И. Бернулли эта мысль высказана еще резче: «Величина, увеличенная или уменьшенная на бесконечно малую величину, не увеличивается и не уменьшается» (Die Differentialrechnung, стр. 11).

Приведенный кардинальный постулат, позволяющий отбрасывать бесконечно-малые, является фундаментом математики бесконечного школы Лейбница. Пользоваться им очень просто, и он сразу дает множество теорем. Вот как, например, выводится диференциал, — по Лопиталю, разность — произведения двух величин xy. Когда x становится $x + dx$, а y переходит в $y + dy$, то произведение $(x + dx)(y + dy)$ станет $xy + xdy + ydx + dxdy$, а изменение произведения будет $xdy + ydx + dxdy$. И так как последний член суммы бесконечно мал сравнительно с двумя первыми, то $xdy + ydx + dxdy$ будет то же, что и $xdy + ydx$, т. е. $d(xy) = xdy + ydx$. Это, как мы знаем, вполне справедливо, хотя начала, на которых основывается доказательство Лопиталя, на наш взгляд, разумеется, ложны.

Воззрения и методы исследования школы Лейбница, как видно, не отличаются строгостью и четкостью. Основные принципы нового исчисления, собственно, здесь почти не разработаны, а те идеи, которые играют руководящую роль, логически небезупречны. Главное орудие анализа — бесконечно малые величины, из бесконечного числа которых складываются конечные величины, точно не определяются и принимаются не то за действительную величину, не то за абсолютный нуль и ничто или, лучше, — то за действительную величину, то за ничто. Это понятие, двойственное и мистически неясное, подвергается затем действиям, явно противоречащим логике, ибо прибавление бесконечно малой величины не изменяет конечного слагаемого, хотя эта бесконечно-малая все же не нуль.

Столь же логически не обосновано, конечно, отождествление кривой и бесконечностороннего многоугольника, касательной и секущей и пр.

В этих условиях, естественно, возникал вопрос: что же, анализ бесконечно-малых — это абсолютно точная наука, дающая достоверные результаты, или же только приближенный метод? Сам Лейбниц, конечно, убежден в первом, как видно хотя бы из приведенных выше его слов, но обосно-

вать постоянную правильность результатов, получаемых при помощи неточных методов откидывания малых величин, ему было нелегко. Вот, например, как рассуждает Лейбниц: «...то, что несравненно меньше, бесполезно принимать в расчет по сравнению с тем, что несравненно больше его: так, частица магнитной жидкости, проходящая через стекло, не сравнима с песчинкой, песчинка с земным шаром, а этот последний с небесной твердью... Несравнимые не суть определенные величины и в геометрических рассуждениях могут быть взяты как угодно малыми для того, чтобы можно было утверждать в силу правил нашего исчисления, что погрешности в высказываемых нами предложениях меньше любых произвольно малых размеров, какие только угодно будет нам назначить противнику, отрицающему справедливость этих предложений» (из письма к Вариньону от 2 февр. 1702 г.). Подобные же соображения высказываются и гораздо позже. Комментатор третьего издания книги Лопиталя в 1768 г. пишет, защищая первый постулат, следующее: «Этот постулат или, вернее, предположение, которое с трудом допускается начинающими, на самом деле не содержит ничего неразумного.

Действительно, измерения, производимые землемерами или астрономами, считают ведь бесконечно точными (! — *А. Ю.*), а между тем они постоянно позволяют себе отбрасывать величины значительно большие, чем это делают алгебраисты. Когда, например, землемер измеряет высоту горы, то обращает ли он внимание на песчинку, сбрасываемую с вершины ветром? Когда астрономы говорят о неподвижных звездах, то не пренебрегают ли они диаметром земли, который составляет около 3 тысяч льё? Когда они вычисляют времена лунных затмений, то не рассматривают ли они землю как шар и считаются ли при этом с домами, с башнями, горами на ее поверхности? А ведь всем этим можно в гораздо меньшей мере пренебречь, чем dx, ибо нужно иметь бесконечное число dx, чтобы получить x; следовательно, диференциальное исчисление по существу самое достоверное из исчислений» («An. des inf. petits», стр. 257—258). Такую

же аргументацию можно найти у английского математика Джюрина, оправдывающего при разборе одной задачи «равенство» $\frac{2x\ (2y + dy)}{2y} = 2x$ тем, что если $2x = 1000$ милям, то ошибка не более миллиардной доли дюйма. Все эти доводы звучат очень грозно, но, конечно, не могут служить доказательством и объяснением не приближенной только, а абсолютной точности результатов, получаемых при пользовании бесконечно-малыми. Это странное противоречие, состоящее в том, что новый анализ, исходя из неточных и, хуже, противоречивых (отнюдь не в диалектическом смысле этого слова) понятий и операций, давал совершенно строгие результаты, первоначально все же не обратившее на себя достаточного внимания, через некоторое время сыграло большую роль в развитии математических идей XVIII в.

Не останавливаясь на других математиках материка, отметим, что даже у Эйлера, обогатившего науку изумительным количеством открытий и много поработавшего над приведением в систему исчисления бесконечно-малых, нет особенной ясности в изложении основных понятий. Для Эйлера диференциалы переменных величин — это «приращения, лишенные величины». И «диференциальное исчисление есть метод определения отношения исчезающих приращений, которые принимают какие-нибудь функции, когда переменная величина, от которой они зависят, получает исчезающее приращение». Правда, Эйлер понимает под производной некоторый предел [1]. Но, во-первых, теория пределов

---

[1] «Следует сначала рассматривать эти приращения как конечные,..., затем эти приращения мыслятся постоянно уменьшающимися, так что отношение их постоянно все более и более приближается к некоторому определенному пределу, которого, однако, достигнет лишь тогда, когда приращения совершенно исчезнут. Этот предел, представляющий как бы последнее отношение приращений, и есть истинный объект диференциального исчисления».—Все эти цитаты взяты из «Оснований диференциального исчисления» («Institutiones calculi differentialis», 1755, стр. LVII — LVIII, LXI).

совсем не служит базой эйлеровой метафизики исчисления бесконечно-малых, а во-вторых, — и это главное — с идеей предела у Эйлера мирно сочетается представление об исчезающих приращениях, о приращениях, лишенных величины, о диференциале как нуле и о пределе, который получается, когда эти приращения совершенно исчезнут. При этом, конечно, dx можно пренебрегать как исчезающим по сравнению с конечной величиной, dx^n по сравнению с dx и т. д. Для того чтобы выйти из затруднительного положения, при котором все диференциалы равно оказываются нулями, и чтобы получить возможность делить эти переодетые в диференциальную форму нули друг на друга, вводятся различные порядки малости и используется тот закон, по которому непрерывно и одновременно изменяются числитель и знаменатель. Но явный переход к пределу не совершается.

3

Если на материке Европы исключительно господствует исчисление бесконечно-малых как таковое, то в Англии развитие направляется по другому пути. В ней, хотя и не сразу, но зато прочно и надолго обосновывается теория флюксий Ньютона. Интересно при этом, что в отличие от континентальных ученых англичане гораздо раньше обращают внимание на вопросы обоснования математики и достигают много бо̀льших результатов в этой области, хотя собственная математика у них после Ньютона развивалась значительно менее успешно, чем математика школы Лейбница.

Главное отличие теории флюксий в ее законченном виде от современного ей диференциального исчисления заключается в стремлении изгнать из математики бесконечное при помощи метода первых и последних отношений, т. е. пределов. Во главу угла ставится понятие флюксии, эквивалентное по содержанию нашей производной и выражающее собой скорость изменения какой-нибудь величины (пути, площади кривой и т. д.) по отношению к другой (времени, абсциссе и пр.). Эти флюксии принимаются за понятия, не нуждающиеся

в дальнейшем обосновании и столь же интуитивно ясные, как представление о скорости движения в какой-либо момент времени. Вычисляются флюксии посредством процесса, совпадающего по форме с нашим переходом к пределу при вычислении производных и отличного от него только в методологическом отношении.

Но сколько-нибудь логически законченное выражение теория флюксий получила только после десятилетий исканий и споров. Взгляды же самого Ньютона на протяжении его математической деятельности сильно эволюционировали и даже коренным образом менялись. Ему не удалось создать безупречную и монолитную систему воззрений, хотя в развитии его идей и преобладала все время одна тенденция. И Брэншвиг правильно указывает, что Ньютону не удалось «ни заставить себя понять полностью, ни, может быть, полностью объясниться»[1].

В первые годы своей научной работы Ньютон употребляет бесконечно малые величины и оперирует ими по образцу других математиков, отбрасывая их и т. п. Он говорит в этот период — около 1665 г. — при решении одной задачи на определение отношения между скоростями изменения некоторых величин, что «тело A, имеющее скорость p, описывает в момент времени бесконечно малую линию o» так что путь, равный x в «один момент» времени, «в следующий (next)» момент становится $x+o$. При последующем диференцировании уравнения, связывающего изменяющиеся величины (пути, проходимые телами A, B, C), Ньютон делит соответствующее выражение на o и говорит, что те члены получившегося частного, которые содержат o, «бесконечно меньше других, его не содержащих». Поэтому искомое уравнение найдется, «если отбросить члены, содержащие o». Инфинитезимальная трактовка диференцирования, приспособленная к вычислению скоростей, здесь совершенно очевидна. Так же обстоит дело и в «Методе флюксий»,

[1] L. Brunschvicg, Les étapes de la philosophie mathématique (3-е изд., 1929 г., стр. 192).

составленном в 1671 г. (но опубликованном лишь в 1736 г.), в котором четко сформулированы две задачи нового исчисления: определение скорости по заданному пути и пути по заданной скорости. И здесь Ньютон свободно и безоговорочно применяет бесконечно-малые[1].

В дальнейшем Ньютон пытается по возможности освободиться от употребления бесконечно-малых. Это понятие предоставляется ему «недостаточно строгим и математическим». Он, впрочем, сам считает возможным и допустимым употреблять их в эвристических целях. Но эти леса должны быть тотчас же убраны по окончании постройки и ни в коей мере не должны служить материалом для фундамента математики. Своей целью Ньютон ставит теперь полное изгнание бесконечно-малых и замену их методом первых и последних отношений. Эта тенденция проводится в «Математических началах естественной философии» (1685) и достигает высшего пункта в «Трактате о квадратуре кривых» (1704). Но вместе с тем и в этих его работах и в опубликованной в промежутке между ними как приложение к «Алгебре» Валлиса малой «Квадратуре кривых» (написанной в 1676 г. и напечатанной в 1693 г.) с теорией пределов и борьбой против «неделимых» постоянно сосуществует, то в качестве дополнения, то в качестве важного элемента рассуждений, бесконечно-малое. И если одни высказывания, звуча почти по-современному, позволяют, казалось бы, усмотреть у Ньютона развернутую теорию пределов, то другие, соседние утверждения не позволяют этого сделать, свидетельствуя о двойственности взглядов великого английского ученого. Он всеми силами старается дать анализу прочную базу, но он не может преоборотъ довлеющую над эпохой концепцию бесконечно-малых и, тем более, отказаться от употребления последних на практике. Хотя он и имеет достаточно ясное представление о беско-

[1] См., например, отрывок из «Метода флюксий» в IV вып. «Хрестоматии по истории математики» Г. Вилейтнера (ГТТИ, 1932, стр. 116—119).

нечно-малых, как о переменных величинах, пределом которых служит нуль, но он не всегда строго придерживается этого взгляда и не замечает, что его теорию пределов можно хорошо согласовать с такими бесконечно-малыми. Отсюда — различные по смыслу высказывания, двусмысленное употребление терминов, неясность терминологии и колебания.

Вот что пишет Ньютон в «Математических началах»: «Я предпослал эти леммы[1] с целью избежать утомительного проведения длинных доказательств путем приведения к нелепости по методу древних геометров. Метод неделимых дает значительно более короткие доказательства. Но так как гипотеза неделимых несколько груба (durior; слово самого Кавальери) и метод этот соответственно почитается менее геометрическим, то я предпочитаю свести доказательства последующих предложений к первым и последним суммам и отношениям зарождающихся и исчезающих величин, т. е. к пределам этих сумм и отношений, и, таким образом, выводы этих пределов сделать по возможности краткими. Ибо таким путем получается то же самое, что и при помощи метода неделимых, и поскольку эти принципы будут доказаны, то мы сможем пользоваться ими с большей безопасностью. Таким образом, если я в последующем буду рассматривать величины как состоящие из частиц или же применять маленькие кривые линии как прямые, то не нужно полагать, что я подразумеваю при этом неделимые величины, а величины исчезающие и делимые; не суммы и отношения определенных частей, но всегда пределы сумм и отношений. Справедливость таких доказательств постоянно будет зависеть от метода, изложенного в предшествующих леммах»[2].

---

[1] Одна из них утверждает, что величины и отношения величин, которые в конечный промежуток времени стремятся к равенству и до конца этого промежутка сближаются ближе, чем на любую данную разность, в конце концов становятся равными. Другая важная лемма относится к многоугольникам, вписанным и описанным вокруг площадей кривых.

[2] «Мат. начала», кн. I, разд. I, поучение к 11-й лемме.

Из приведенного отрывка видно, что, сохраняя, как говорилось, за методом неделимых практическое значение, Ньютон решительно отказывается принять его как метод доказательства. В качестве последнего принимается метод пределов. Однако добрые намерения предостерегающего здесь читателя Ньютона, специально оговаривающего переменный характер бесконечно-малых, остались втуне; и десятилетия спустя его последователи не имеют еще ясного понятия о бесконечно-малых. Ньютон первый нередко отклоняется от него.

Если до сих пор изложение Ньютона не вызывает у современного математика особенных возражений, то уже непосредственно следующий текст много менее убедителен. Автор «Начал» полемизирует в защиту своей теории. Могут ведь возразить, что не существует «последнего отношения исчезающих величин». Ведь отношение величин, пока они не исчезли, не будет последним отношением, а если величины уже исчезли, то нет никакого отношения. На эти законные возражения Ньютон не дает удовлетворительного ответа. Он переносит спор на другую почву и оперирует аналогией. «С таким же правом,— говорит он,— можно утверждать, что нет последней скорости у тела, прибывающего в какое-нибудь место и перестающего двигаться, ибо до прибытия это не последняя скорость, а когда оно уже прибыло, то скорости нет». Дело объясняется по Ньютону так: «последняя скорость— это скорость ни до, ни после момента достижения последнего места движения, а скорость в самый момент его достижения». «Точно так же под последним отношением исчезающих величин нужно понимать их отношение ни до и ни после их исчезновения, но отношение, с которым они исчезают. Подобным же образом первое отношение зарождающихся величин — это то, с которым они начинают существовать... Существует предел, которого скорость в конце движения может достигнуть, но не может превзойти. Это и есть последняя скорость. И существует подобный же предел для всех величин и отношений, которые начинают и перестают существовать»[1].

[1] «Мат. начала», кн. I, разд. I, поучение к 11-й лемме.

Соображения Ньютона не очень убедительны. Апелляция к скорости не доказывает ничего. На деле выясняется только, что интуитивно как будто ясное понятие скорости в некоторый момент времени (мгновенной скорости) по существу отнюдь не столь ясно с логической стороны и само нуждается в исследовании. Кроме того, выражение: отношение, «с которым величины исчезают» или «начинают существовать», совсем неопределенно. Конечно, у дроби, числитель и знаменатель которой неограниченно убывают по абсолютной величине, часто существует предел. Но этот предел вовсе не есть отношение, с которым величины исчезают. Слова «отношение в момент исчезновения» сразу же снова вызывают вопрос: а в этот момент они уже исчезли, они нули или нет? — вопрос, за которым снова последуют те же упреки [1].

Если логические шероховатости встречаются уже в защите метода пределов, то еще хуже становится, когда Ньютон начинает пользоваться бесконечно-малыми, которые он называет моментами. Моменты изменяющихся величин — это «мгновенные приращения или уменьшения», которые не следует рассматривать как конечные величины. Это только «едва-едва зарождающиеся начала конечных величин» [2]. Очевидно, что то, что говорится об этих моментах, далеко от требуемой ясности.

---

[1] Важно подчеркнуть, что для Ньютона, как видно из текста, переменная всегда достигает своего предела, являющегося последним ее значением. Отсюда — ряд неразрешенных им трудностей. Вопрос о том, достигает переменная предела или нет, оживленно дебатировался в Англии в тридцатых годах XVIII в. и был в то время для большинства решен отрицательно.

[2] Там же, кн. II, разд. II, лемма 2-я. В «Трактате о квадратуре кривых» Ньютон стремится понимать под моментом просто произвольно малую величину. Но и там они, как справедливо замечает Кеджори, строго говоря, не могут быть названы ни нулями, ни конечными величинами. (Fl. Cajory, A History of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse, стр. 35.)

Употребление моментов также выдает их инфинитезимальное происхождение и смысл. И основная негладкость таится не в туманном определении момента, а в том, как Ньютон оперирует моментом. Здесь следует указать, что для Ньютона математика, разумеется, не есть метод приближения. И «в математических вопросах нельзя пренебрегать и самыми малыми ошибками» [1]. Поэтому все вычисления должны вестись строго в духе обыкновенной арифметики. Отказавшись, таким образом, от права пренебрегать и отбрасывать бесконечно-малые и не проводя различия между приращением и моментом, Ньютон неизбежно натолкнулся на большие неудобства при вычислении моментов. Действительно, определим хотя бы момент произведения AB двух переменных величин A и B. Увеличим A на его момент a и B соответственно на b; тогда произведение превратится в $AB + Ab + Ba + ab$ и его «мгновенное приращение» будет $AB + Ab + Ba + ab - AB = Ab + Ba + ab$. И так как для Ньютона момент по определению совпадает с мгновенным приращением, то и момент должен быть равен $Ab + Ba + ab$ [2]. Для того чтобы выйти из положения, не прибегая к незаконной в его глазах операции откидывания хотя бы и «самых малых» величин, Ньютон пускается на особую уловку. «Пусть,—говорит он,—множители сперва были $A - \frac{1}{2}a$ и $B - \frac{1}{2}b$, тогда их произведение дает $AB - \frac{1}{2}Ab - \frac{1}{2}Ba + \frac{1}{4}ab$. Придадим моменты a и b; множители тогда станут $A + \frac{1}{2}a$ и $B + \frac{1}{2}b$, а про-

---

[1] «Трактат о квадратуре кривых», § 5.

[2] Для нас ясно, что поскольку $\Delta(AB) = Ab + Ba + ab$, то $d(AB) = Ab + Ba$. Мы здесь не производим, однако, незаконных «отбрасываний» бесконечно-малых второго порядка, а просто пользуемся определением отношения между приращением функции и ее диференциалом. (Диференциал есть главная часть приращения.) Неприятности Ньютона связаны с тем, что он не разграничивает достаточно четко момент (диференциал) и приращение.

изведение $AB+\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{2}Ba+\frac{1}{4}ab$. Если из второго произведения вычесть теперь первое, то получится ровно $Ab+Ba$»[1]. Выкладки автора «Математических начал» верны но кунстштюк совершенно очевиден. Во-первых, нет никаких оснований (кроме затаенной цели Ньютона) для выбора именно $A-\frac{1}{2}a$, $B-\frac{1}{2}b$ и для отказа от естественных начальных значений A и B. Во-вторых, если применить те же приращения для случая произведения трех величин ABC то легко увидеть, что произойдет осечка и нужное приведение и сокращение членов не получится. Критики Ньютона впоследствии подметили этот уязвимый пункт, свидетельствующий о недоверии к собственному методу, а его первые защитники вышли из дискуссии хотя и не поколебленные субъективно, но без особенной чести.

В работах Ньютона, опубликованных после 1684 г., замечаются те же колебания. Как говорилось, наиболее ярко тенденции его учения проявились в «Трактате о квадратуре кривых» (1704). В предисловии к этому сочинению Ньютон коротко формулирует основные идеи ведущей линии его философии математики. «Я здесь рассматриваю,— пишет он,— математические величины не как состоящие из очень малых частей, но как описываемые посредством непрерывного движения. Линии описываются и образуются при этом не приложением (appositio) частей, а непрерывным движением точек, поверхности — движением линий, тела — поверхностей, углы — вращением сторон, отрезки времени — непрерывным течением и т. д. Это порождение действительно коренится в природе вещей и каждодневно наблюдается в движении тел...

«Рассматривая эти величины, возрастающие в одинаковые времена и порождаемые путем возрастания и становящиеся бо́льшими или меньшими в зависимости от бо́льшей или мень-

---

[1] «Математические начала», кн. II, разд. II, лемма 2-я.

шей скорости их возрастания и порождения, я искал способ определения величин, исходя из скоростей движений или приращений, с которыми они порождаются. Назвав скорости движений или приращений *флюксиями*, а порождаемые величины *флюентами*, я постепенно... пришел к методу флюксий...».

«Флюксии относятся почти как (quam proxime) увеличения (augmenta) флюент, порождаемые в равные и очень малые частицы времени, и, выражаясь точно, они находятся в *первом отношении* зарождающихся увеличений»[1] или «в последнем отношении исчезающих частей». Здесь почти все обстоит гладко, исключая попрежнему нерасшифрованные и дающие повод для возражений слова «первое отношение зарождающихся частей» и т. д. Но если из принципиальных положений этого труда бесконечно-малые устранены почти радикально, то в промежутке между 1684 и 1727 гг. (годом смерти Ньютона) мы можем найти в публикациях автора флюксий и инфинитезимальные высказывания и проявление странной терпимости[2] к другим методам. В приложении к «Алгебре» Валлиса хотя и оговаривается, что Ньютон (оно написано в третьем лице) предпочитает метод флюксий употреблению понятия момента или последних частиц, или бесконечно малых разностей, но имеются и отрывки такого типа: «Пусть o будет бесконечно малая величина, а $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ одновременные моменты или мгновенные приращения текущих величин z, y, x; эти величины

---

1 «Трактат о квадратуре кривых», § 1, 2, 3.

2 В «Квадратуре кривых»: «Я хотел показать, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры. Однако анализ может оперировать любыми фигурами, конечными или бесконечно малыми, которые представляют себе подобными исчезающим фигурам, а также фигурами, которые в методе неделимых принимают за бесконечно-малые, если только действовать с должной осторожностью» (§ 11). — Это место любопытно для характеристики практического подхода к вопросам обоснования анализа со стороны Ньютона. То же мы наблюдаем и у многих других математиков XVII и XVIII вв. Также у Лейбница имеются аналогичные высказывания.

в следующий момент времени, получив мгновенные приращения, станут $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$». Вычисляя отношение между флюксиями величин x, y, z, связанных уравнением $x^3 - xy^2 + a^2z = 0$, он подставляет $z + o\dot{z}$ и прочее в уравнение, вычитает из результатов прежнее выражение, делит на o и пишет: «уничтожьте члены, умноженные на o как бесконечно-малые, и останется уравнение $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$». Приложение написано в 1676 г., но напечатано в 1693 г. Да и в самом «Трактате о квадратуре кривых» имеется небезупречный вывод флюксии для x^n (§ 10), о котором придется говорить еще ниже. Бесконечно-малые сохранены и в «Анализе при помощи уравнений с бесконечным числом членов» (написано в 1669 г., напечатано в 1711 г.).

Резюмируя, можно охарактеризовать позицию Ньютона следующим образом. Сторонник метода бесконечно-малых в первом периоде, он развивает во втором относительно строгую теорию пределов. Однако наряду с теорией пределов у него постоянно встречаются высказывания инфинитезимального толка, в самом изложении теории пределов имеются недоговоренности и логические неясности и, наконец, практическое пользование бесконечно-малыми не сопровождается подлинным углублением доказательств при помощи перехода к пределу. Непосредственно последующие ученые не смогли установить ни этой эволюции Ньютона, ни зависимости между теорией пределов и доказательствами с помощью бесконечно-малых. Смешав то и другое, эти ученые внесли на некоторое время изрядную путаницу в философию математики.

Действительно, те книги [1], которые вышли в Англии между 1700—1730 гг., показывают, что идеи Ньютона были усвоены большинством весьма неглубоко. Определения и принципы постоянно страдают смешением понятий. Метод флюксий и

---

[1] Не располагая, к сожалению, оригиналами цитируемых ниже книг Крэга, Гарриса, Гейса, Рафсона и Стона, я вынужден был воспользоваться здесь вышецитированной полухрестоматийной работой Кеджори.

пределов полновластно овладел британскими математиками лишь после полемики с Беркли и многолетней работы над очисткой важнейших идей анализа [1]. До этого времени хотя он и является формально национально английским, но содержание его не совпадает с концепцией Ньютона. Островные математики безжалостно перевирают взгляды своего учителя и путают их со взглядами Лейбница. Например, Дж. Гаррис характеризует в 1702 г. теорию флюксий как «арифметику бесконечно малых приращений». И, оказывая медвежью услугу ее автору, он заявляет: «Эти бесконечно малые приращения или убывания наш несравненный мистер И. Ньютон назвал очень подходящим именем флюксий». Другой ученый, Гейс (Hayes), идет еще дальше. Согласно Гейсу («Трактат о флюксиях», 1704) величины бесконечно делимы, и частицы, получающиеся после бесконечного деления, называются моментами, или диференциалами, или же..., флюксиями. То же самое можно найти в «Истории флюксий» Джозефа Рафсона (Raphson, 1715). Аналогичное недоразумение встречается даже в «Commercium Epistolicum» [2], издатели которой заявляют, что «метод диференциалов тот же самый, что и метод флюксий, исключая названия и обозначения. Лейбниц называет разностями те величины, кото-

---

[1] Исключительность, с которой англичане придерживались ньютоновой системы наряду со стимулами философского порядка и знаменитым спором о приоритете с Лейбницем, определялась и этой полемикой. —Любопытно, между прочим, что первая английская книга по анализу Джона Крэга (J. Craig), вышедшая в 1685 г., через год после первой же статьи Лейбница в «Acta eruditorum», употребляет диференциалы. До 1718 г. в своих статьях и книгах Крэг пользуется символикой Лейбница. После 1718 г. (разгар спора о приоритете) он применяет исключительно флюксионное обозначение. Ряд других математиков (Муавр, Галлей, Стирлинг) тоже употребляет бесконечно-малые. — Разумеется, были ученые (Диттон, Тэйлор), более строго следовавшие Ньютону.

[2] «Переписка» различных ученых, опубликованная в 1712 г. по постановлению Английского королевского об-ва в связи со спором Лейбница и Ньютона о первенстве в изобретении нового исчисления.

рые Ньютон называет моментами или флюксиями». И еще в 1730 г. Стон, переводчик Лопиталя на английский язык, пытаясь причесать ученика Бернулли на свой лад, во всех постулатах и теоремах заменяет слово «разность» через «флюксию». В результате текст Лопиталя приобретает такой вид: «бесконечно малая часть, на которую переменная величина непрерывно возрастает или убывает, называется флюксией этой величины» и т. п.

Обрисованная путаница идей говорит, с одной стороны, о том большом влиянии, которое оказывали более удобные и простые, хотя и менее тонкие, идеи материка, пока им не был закрыт доступ в умы англичан. С другой стороны, она показывает, что взгляды Ньютона были решительно не поняты большинством математиков того времени как из-за неясности изложения самого Ньютона, так и в силу незначительности той связи, которая существовала в то время между идеей предела и вычислительными приемами. Достаточно было малейшего повода, чтобы кто-либо обрушился на эту нестройную систему.

4

Таким критиком явился знаменитый философ Джордж Беркли. Я займусь здесь только математическим содержанием и значением выпущенного им памфлета «Аналист» [1].

---

[1] «The Analyst or A Discourse addresed to an Infidel Mathematician» и т. д., «Аналист или рассуждение, обращенное к неверующему математику, в котором рассматривается более ли ясно или более очевидно выводятся предмет, принципы и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры» (1734). Цитирую я по изданию сочинений Беркли Фрезером (The Works of G. Berkeley, 1901 г. т. III). Беркли преследовал в этом памфлете не математические цели, а стремился подорвать авторитет свободомыслящих математиков (говорят, письмо обращено к астроному Э. Галлею). Но независимо от теолого-политических устремлений Беркли идеи его работы являются последовательным развитием его идеалистической философской системы, одним из главных положений которой служит: «существовать — значит

Обыкновенно историки математики уделяют «Аналисту» незаслуженным образом малое внимание. Между тем его роль в развитии идей анализа была отнюдь немалая. Беркли попал не в ту цель, в которую он метил, и не обратил в лоно благочестия свободомыслящих ученых, но зато, ясно и остро поставив теоретические вопросы и вскрыв ряд противоречий, он побудил заняться поисками правильного решения. Ф. Кеджори, сравнивающий «Аналист» с бомбой, попавшей в математический стан, справедливо расценивает его как выдающееся произведение, «явившееся поворотным пунктом в истории британской математической мысли».

Вместе с тем одна из идей Беркли послужила одним из принципов обоснования исчисления бесконечно-малых в XVIII в.

Свою критику Беркли направляет и против исчисления бесконечно-малых и против метода флюксий. Он не возражает против того, что с их помощью математики получают верные результаты. Но как получают, спрашивает он, с помощью каких исходных понятий и какими путями?—Вывод его исследования неблагоприятен. Оказывается, что «заключения математиков не получены посредством правильного рассуждения из ясных принципов» (стр. 51), что метод анализа не согласуется с законами логики и что «как бы он ни был полезен, его можно рассматривать лишь как некоторую догадку (presumption), ловкую сноровку, искусство или скорее ухищрение, но не как метод научного доказательства» (стр. 36). Эту суровую оценку Беркли подкрепляет следующей аргументацией. «Прежде всего, —говорит он, —разум не в состоянии понять этих последних «частиц времени» или «последних приращений». Что, собственно, представляют собою так называемые моменты или «приращения текущих величин in statu nascenti, в самом начале их зарождения или суще-

---

быть воспринимаемым каким-нибудь субъектом». Отсюда следует, что бесконечно-малые, как не воспринимаемые, не существуют. Уже в «Трактате о началах человеческого знания», вышедшем в 1710 г., в § 130—132, довольно подробно выражено отношение Беркли к современной ему математике.

ствования, до того как они становятся конечными частицами» (стр. 19)? Невозможно представить себе этих двойственных и подозрительно неясных (obscure) понятий. И еще менее можно вообразить себе отвлеченные скорости этих зарождающихся «несовершенных сущностей (entities)». А начальная скорость начальной скорости или зарождающееся приращение зарождающегося приращения «превосходят уже всякое человеческое разумение». Этот мотив повторяется неоднократно. Разбирая далее ньютоново стремление избавиться от бесконечно-малых и (отчасти справедливо) отмечая его неудачу, Беркли говорит: «Что такое флюксии? Скорости исчезающих приращений. А что такое сами эти исчезающие приращения? Это ни конечные величины, ни бесконечно-малые, ни даже ничто. Не могли бы мы их назвать призраками почивших величин (ghosts of departed quantities)» (стр. 44). Разумеется, анализ Лопиталя (Беркли его цитирует) подвергается столь же безусловному осуждению. — С нашей стороны можно сказать, что хотя английский философ пропустил мимо все богатство идей, таившееся в критикуемых им высказываниях Ньютона, но с определенной точки зрения он был прав. Оправданием его критики было и то, что рассказывал об основах метода флюксий Ньютон, и особенно то, что встречается на этот счет в учебниках его поздних современников.

Установив шаткость фундамента, Беркли переходит к изучению методов доказательства. В § 9 он рассматривает основную теорему о моменте произведения AB и, резонно упрекая Ньютона в непоследовательности, задает ньютонианцам нелегкую задачу получить $Ab + Ba$, не отбрасывая ab и не вводя искусственных ad hoc придуманных уловок. Далее, он разбирает вывод флюксии степенной функции x^n и снова находит противоречие. Действительно, вывод таков. Когда x становится $x + o$, x^n становится $(x + o)^n$, т. е.

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2x^{n-2} \text{ и т. д.}$$

Приращения

$$o \text{ и } nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2x^{n-2} \text{ и т. д.}$$

относятся, как

$$1 \text{ к } nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2x^{n-2} \text{ и т. д.}$$

Дальше, передавая дословно Ньютона, Беркли заканчивает вывод: «Пусть теперь приращения исчезнут и их последнее отношение будет 1 к nx^{n-1}». В этом выводе автор «Аналиста» усматривает нарушение логики. Ясно, говорит он в особой лемме (стр. 28), что если при выводе какого-нибудь предложения принимали некоторые допущения и если их в конце вывода заменили противоположными, то весь вывод повисает в воздухе. А ведь именно так поступает Ньютон. «Когда он (Ньютон) говорит, пусть приращения исчезнут, т. е. пусть они станут ничем, т. е. пусть уже не будет приращений, то предыдущее допущение, что приращения были чем-то, что были приращения, отбрасывается, однако же последствия этого допущения, т. е. полученное в силу него выражение, сохраняются. Это, согласно предшествующей лемме, ложный способ рассуждения» (стр. 25). Опять-таки Беркли по отношению к Ньютону прав, хотя английские математики признали это лишь 70 лет спустя, а выход из положения найти нетрудно, на основе более разработанной теории пределов [1].

Далее перед Беркли возникла естественная проблема: каким же образом при таких условиях новый анализ получает правильные результаты. Стараясь раскрыть причины этого странного и замечательного обстоятельства, Беркли наткнулся на мысль, что истинность результата обусловлена наличием двух ошибок в его выводе; эти две равные и

---

[1] Разумеется, взятая в чистом виде лемма Беркли несправедлива. Основываясь на ней, было бы вообще невозможно построить диференциальное исчисление, которое обязательно должно при изучении касательной исходить из секущей, «полагать» конечную разность, с тем, чтобы после «снять» ее, переходя к пределу, и т. п.

взаимно противоположные ошибки уничтожают друг друга. Он демонстрирует свою мысль на нескольких примерах, из которых я приведу задачу проведения касательной к параболе AB, уравнение которой $y^2=px$. Здесь $PB=y$, $PM=dx$, $RN=dy$. Исчисление бесконечно-малых определяет касательную, находя подкасательную и рассматривая кривую как многоугольник. Тогда треугольник TPB подобен треугольнику BRN и, значит, подкасательная $PT:PB=$ $=BR:RN$, т. е. $PT=\frac{ydx}{dy}$, и так как из уравнения параболы $y^2=px$ следует, что $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}$, то $TP=\frac{2y^2}{p}=2x$.

Ошибка в этом выводе по Беркли та, что на самом деле треугольнику TPB подобен не BRN, а BRL. Если обозначить NL через z, то на деле будет: $PT=\frac{ydx}{dy+z}$. Таким образом в знаменателе дроби имеется ошибка на z. Эта ошибка неявным образом погашается ошибкой при вычислении dy из уравнения кривой. Согласно дифференциальному исчислению $dy=\frac{pdx}{2y}$, но это неверно, ибо из $(y+dy)^2-y^2$ следует, что $dy=\frac{pdx}{2y}-\frac{(dy)^2}{2y}$. Если подставить dy в правильное выражение для PT, то $PT=\cfrac{ydx}{\frac{pdx}{2y}-\frac{(dy)^2}{2y}+z}$.

Фиг. 1.

Далее, считая (на основании 33-й теоремы I книги Аполлония «О конических сечениях») величину подкасательной уже известной и равной $2x$, Беркли доказывает, что $z=\frac{(dy)^2}{2y}$, откуда получает, что $PT=\frac{2y^2}{p}=2x$.

Налицо, таким образом, две противоположные ошибки. Эта идея компенсирующихся погрешностей не играла в глазах Беркли (и тем более стоявших на почве теории пределов его оппонентов) особенного значения и служила просто для объяснения парадокса. Между тем на континенте ей суждено было сыграть большую роль[1].

Дальнейшая работа английских математиков протекает первоначально под знаком борьбы с Беркли. «Аналист» тотчас после опубликования вызывает ответы Джюрина (Jurin) и Вальтона (Walton), с которыми у Беркли завязывается долгая и страстная полемика. Уже в этом споре значительно уточняются воззрения ньютонианцев. Неотчетливые и слабые формулировки первых ответов постепенно заменяются значительно лучшими. Понятия предела, флюксии, момента выкристаллизовываются еще не с полной чистотой, но английские математики становятся твердо на путь логического закрепления базы своей науки. За полемикой с Беркли идет спор о том, достигает ли переменная предела или нет, спор нудно долгий, но вместе с тем и полезный[2].

Почти все учебники ближайшего десятилетия так или иначе затрагивают «Аналиста», стремясь защитить матема-

---

[1] Несмотря на все остроумие рассуждений Беркли, нельзя не констатировать, что он не понял значения нового анализа. Некоторые историки (Брэншвиг, Кеджори и др.) отрицают это, но слова самого Беркли свидетельствуют о сказанном. Он считает, что наука и человечество ничего бы не потеряли, если бы отпали теория флюксий и исчисление бесконечно-малых (см. «The Analyst», стр. 53 и «Трактат о началах человеческого знания», перевод под редакцией Н. Дебольского, стр. 163—164).

[2] Пределом называется величина, «к которой переменная величина может приблизиться как угодно близко, хотя она и не может никогда стать абсолютно ей равной» (В. Робинс, Robins). — «Под пределом переменного отношения понимается некоторое определенное отношение, к которому, по предположению, переменное отношение непрерывно приближается и подходит ближе, чем на любую заданную разность, хотя и не может никогда превзойти его. Сэр Исаак Ньютон

тику от его ядовитых нападок. И такое фундаментальное сочинение, как «Трактат о флюксиях» К. Маклорена, является плодом борьбы с «Аналистом».

Маклорен сам указывает в предисловии, что «вышедшее в 1734 г. под названием «Аналист» письмо послужило первым поводом для появления этого трактата» [1], целью которого является вывести основные положения флюксионного исчисления «на манер древних», «самыми строгими доказательствами». Маклорен — противник бесконечно-малых, которые представляются ему «таинственными» понятиями; он согласен, что математики континента зашли слишком далеко с их кривыми-многоугольниками и т. п. [2], и если Маклорен говорит о бесконечно-большом, то он понимает его лишь как потенциальное. Например, площадь между гиперболой и асимптотой при достаточном удалении вдоль асимптоты может превзойти любую заданную площадь. Представление о пределе у Маклорена уже достаточно ясное. Это видно хотя бы из того, как он разбирает вопрос о площадях гипербол высших порядков ($y=\frac{1}{x^n}$, где $n>1$) «существует некоторая конечная площадь, которой эта площадь (т. е. гиперболы), никогда не может стать равной, но к которой она, однако, настолько приближается, что избыток конечной площади над ней может стать меньше любой задан-

---

понимает, на мой взгляд, под достижением предела то, что *переменная величина* — или отношение — становится абсолютно равной той определенной величине — или отношению, — к которой она по предположению стремится» (Джюрин). Достигнет ли переменная предела или нет, для Джюрина зависит от того, конечно или нет время, в течение которого переменная приближается к пределу.

[1] C. Maclaurin, «A Treatise of Fluxions in Two Books», 1742, стр. 1.

[2] Враждебное отношение английских математиков к бесконечному вообще вполне согласовалось с влиятельной философией Локка и общеэмпирическим умонастроением.

ной площади, если продолжить кривую и асимптоту на некоторое определенное расстояние» [1].

Отчетливое понимание вопроса позволяет Маклорену ответить на упоминавшиеся возражения Беркли против вывода флюксии для x^n. Говорят, «что Ньютон сперва допускает, что существуют приращения, и что когда он говорит: пусть приращения исчезнут, то это допущение отбрасывается, хотя последствия этого допущения, т. е. полученное при помощи его выражение, сохраняются... Если бы Ньютон после предположил, что не было никаких приращений, то это действительно было бы допущение, противоречащее предшествующим. Но когда он допускает, что эти приращения уменьшаются, пока не исчезнут, то это предположение, конечно, не может быть названо противоречащим первому и не может препятствовать нам выяснить, каково отношение этих приращений в любой момент времени, пока они действительно существуют, как изменяется это отношение и к какому пределу оно приближается, когда приращения непрерывно уменьшаются. Наоборот, это очень краткий (concise) и правильный метод определения нужного предела» [2]. Если защита Ньютона не вполне резонна, то сказанное Маклореном от себя не вызывает возражений.

Что касается самого исчисления флюксий, то Маклорен основывает его на определении флюксии как скорости, которая измеряется тем пространством, какое было бы пройдено в единицу времени телом, если бы оно двигалось начиная с данного момента, с постоянной скоростью, равной скорости в данный момент. Основываясь на этом представлении и нескольких аксиомах механического характера [3].

---

[1] «Treatise of Fluxions», I, стр. 43. Переменная для Маклорена не достигает предела. Эта более узкая трактовка вопроса в свое время была весьма полезна, спасая от многих трудностей.

[2] Там же, т. II, стр. 422.

[3] Вроде той, например, что пространство, пройденное при ускоренном движении, больше пространства, пройденного за то же время с постоянной скоростью, равной начальной, и т. п.

Маклорен дает в двух огромных томах довольно строгое и вместе с тем бесконечно тягучее изложение анализа.

В работе Маклорена английская теория пределов XVIII в. находит высшее завершение. Последующие английские ученые того времени мало что прибавили в развитии философии математики [1].

Таким образом английская математика обнаружила большой интерес к философии математики и немалые достижения [2]. И ее работа оказала известное влияние на развитие европейской математики в этой области. Однако собственная математика англичан была много ниже по уровню и результатам, чем континентальная. Причиной этому была, как известно, тяжелая символика и методы доказательства теории флюксий, затруднявшие быстрое продвижение вперед. Естественно, что при этих условиях англичане не смогли дать оказавшегося столь ценным синтеза философии флюксий и удобного алгорифма исчисления бесконечно-малых.

---

[1] Исключением был Дж. Ланден, взгляды которого, однако, далеки от взглядов подавляющего большинства и приближаются к воззрениям Лагранжа.

[2] Нельзя согласиться с резким и огульным мнением Л. Брэншвига, будто математики XVIII в. не внесли ясности в основные понятия своей науки (см. «Les étapes de la philosophie mathématique», стр. 248). Это справедливо лишь по отношению к континентальным математикам, и то до середины XVIII в. — Разумеется, англичане оставили неразработанным многое: идею функции, непрерывности и т. д. Конечно, также, как ни важна зависимость между производной и скоростью, но попытка обоснования математики на базе механики—это лишь бегство вслед за Ньютоном в убежище якобы непосредственно ясного понятия о начальной скорости. Это отмечает, между прочим, еще Даламбер. Наше интуитивное представление о механическом движении и скорости, между прочим, не может служить единственной базой для понятия переменной и производной, ибо тогда, например, мы вынуждены были бы отказаться от рассмотрения недиференцируемых функций (ведь согласно нашему непосредственному представлению всякое движение должно иметь направление и скорость).

5

Начало влияния английских концепций на математиков континента относится к середине XVIII в. Во второй половине XVIII в. среди французских математиков появляются приверженцы и метода пределов и преобразованной теории компенсации погрешностей.

Влияние английской теории пределов совершенно очевидно. С ней можно было познакомиться не только по оригиналам, но и по переводам. Так, в 1740 г. был переведен «Метод флюксий» Ньютона, в 1749 г. — «Трактат о флюксиях» Маклорена. Труднее установить долю английского участия в развитии теории компенсации ошибок. Отголоски «Аналиста» были слышны во Франции. О нем и — намеками — о компенсации ошибок можно было узнать из книги Маклорена. И, прямо называя по имени автора, рассказывает о полемике с Беркли Бюффон в предисловии к своему переводу «Метода флюксий». «Все было спокойно, —пишет он,— в течение нескольких лет, как вдруг в самой Англии появился доктор, враг науки, объявивший войну математикам... И он заявляет нам, что исчисление бесконечного ошибочно, ложно, подозрительно, неясно и что оно приводит к цели лишь случайным образом» [1]. Трудно кому-либо было бы вычитать в последних словах теорию компенсации погрешностей, но более чем вероятно, что французские математики все же о ней слышали [2].

[1] «La Méthode des fluxions», Paris 1740, стр. 15—16.

[2] Во всяком случае в конце XVIII в. французские математики знали об идеях Беркли. Историк математики Монтюкла после рассказа о дискуссиях, развернувшихся вокруг принципов анализа во Франции (Ролль в начале XVIII в. резко выступил против нового исчисления), довольно подробно, хотя и не всегда верно, излагает и споры среди английских ученых. «Этим противником исчисления Ньютона является д-р Беркли... Он уверяет..., что это исчисление ложно, ошибочно и туманно в своих основаниях и что если в применении к геометрии оно и приводит к истинным результатам, то лишь потому, — как это утверждал

Как бы там ни было, если математика континента в первой половине XVIII в. шла своей дорогой, накопляя все больше и больше фактических данных, содействуя успехам астрономии и механики и не заботясь о методологических затруднениях, то вторая половина XVIII в. знаменуется вступлением анализа в новый период. В ряде пунктов движение затрудняется все более и более, попадаются новые досадные парадоксы — и не только в принципах анализа, но и в учении о рядах, в интегральном исчислении, в теории логарифмов и т. д. В результате и на материке начинается неизбежная систематизация материала, относительно твердо устанавливаются многие важные понятия, строго разграничиваются права и обязанности отдельных разделов анализа. Не говоря уже об Эйлере, и другие ученые приступают к систематизации материала. Так, португалец Дакунья в «Началах математики», появившихся с 1787 г. и представляющих собою одну из первых попыток формально изложить математику, дает определение функции, близкое к введенному в XIX в.: «Если величина выражения A зависит от величины другого выражения B, то A называется функцией от B, а B корнем A». Он же определяет бесконечно-большие и малые следующим образом: «Переменная величина, допускающая значения, постоянно превосходящие всякую данную величину, бесконечно велика; переменная же, значения которой могут быть сделаны постоянно меньшими всякой предложенной величины, называется бесконечно-малой». В воздухе носятся уже те идеи, которые получат развитие и приобретут право гражданства некоторое время спустя.

О возрастающем интересе к философии анализа бесконечно-малых на континенте может свидетельствовать, например, объявленный в 1774 г. Берлинской академией наук, президентом которой состоял тогда Лагранж, конкурс на

и Ролль, — что одна ошибка исправляет другую. Наконец, что совсем забавно, он заявлял, что Ньютон сам себя не понимал». J. F. Montucla, «Histoire des mathématiques» (1799—1802), т. III, стр. 117.

тему «о строгой и ясной теории того, что в математике называют бесконечным». Требуется показать, «каким образом из противоречивых посылок получаются столь многочисленные истинные положения, и предложить вместо понятия бесконечности другое отчетливое и достоверное понятие, однако такое, чтобы вычисления не стали затруднительными или долгими». А Даламбер полагает, что «метафизика исчисления бесконечно-малых еще более важна, чем самые его правила, и, может быть, с бо́льшим трудом поддается разработке».

Некоторые ученые континентального направления даже начинают склоняться к тому выводу, что необходимо изгнать бесконечно-малые из математики. Лагранж намеревается осветить «дурно освещенный вход в здание анализа» и изложить принципы его, не прибегая ни к бесконечно-малым или к исчезающим количествам, ни к пределам или флюксиям. Он хочет преобразовать его в алгебраический анализ конечных количеств, опираясь на разложение функции от приращенного аргумента $x + h$ в ряд по возрастающим целым степеням приращения h и на свойства коэфициентов этого ряда. Даламбер в своих статьях по математике, помещенных в «Энциклопедии», делает первую попытку, — впоследствии блестяще выполненную Коши, — положить в основание анализа теорию пределов. Даламбер говорит, что, в противоположность общепринятому мнению, на самом деле «в дифференциальном исчислении речь идет вовсе не о бесконечно малых величинах, но только о пределах конечных величин.. Словами «бесконечно-малые» пользуются лишь для сокращения выражений» [1].

Истинное обоснование анализа Даламбер находит в методе пределов. «Ньютон, — пишет он,— исходил из другого принципа (т. е. не из бесконечно-малых. — *А. Ю.*), и можно сказать, что метод этого великого математика, данный в его исчис-

---

[1] Статья «Fluxion», т. VI «Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers», 1756 г.

лении флюксий, очень точен и ясен, хотя Ньютон и ограничился тем, что лишь бегло очертил его. Ньютон никогда не считал диференциальное исчисление исчислением бесконечно малых величин, а видел в нем метод первых и последних отношений, т. е. метод определения пределов отношений. Этот знаменитый ученый никогда поэтому не диференцировал величины, но только уравнения, ибо всякое уравнение заключает в себе отношение между двумя переменными, и диференцирование уравнений состоит только в определении пределов отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении двух переменных» [1].

Разбирая, далее, задачу определения касательной, Даламбер заканчивает ее следующим определением: «Диференциальное исчисление состоит лишь в том, чтобы алгебраически определить предел отношения, который уже выражен при помощи линий, и затем приравнять оба предела Это и позволяет найти одну из искомых линий» [2]. Что касается понимания предела, то оно у Даламбера близко данному Робинсом, т. е. переменная никогда не совпадает со своим пределом [3].

---

[1] «Encyclopédie», т. IV, 1754, статья «Differentielle».

[2] Нельзя пройти мимо той формулировки Даламбера, что если в уравнениях и встречаются величины, «почитаемые бесконечно малыми, то их следует при этом считать поделенными на другие почитаемые бесконечно малыми величины, и что они при этом выражают ни бесконечно-малые, ни даже дроби с бесконечно малым числителем и знаменателем, но предел отношения двух конечных величин» (ст. «Differentielle»). Отсюда — один шаг к четкому выделению понятия производной. Отметим также, что понятие диференциала у Даламбера все же не выяснено, как и многие другие. Как курьез укажем на то, что Даламбер также заблуждается, как и многие другие, насчет истинного характера флюксий: «Ньютон и англичане называют диференциал флюксией, ибо рассматривают его как мгновенное приращение величины».

[3] «Одна величина является пределом другой, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы ни была мала эта последняя. Однако эта приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой она приближается». Из примеров с

Вслед за Даламбером следует Люилье (получивший премию на упоминавшемся конкурсе Берлинской академии), сам указывающий, что развивает идеи, намеченные первым, Калюзо, во многом, даже в символике, возвращающийся к методу флюксий, и иные математики.

При этом мысли, брошенные когда-то Беркли, получают значительное распространение. Тот же Лагранж, который предпринял позднее попытку заменить более строгой, как он полагал, теорией аналитических функций методы высшего анализа, в начале своей карьеры, в 1761 г., видит сущность его во взаимной компенсации ошибок. «В методе бесконечно-малых, — говорит он, — исчисление исправляет само по себе ошибки, проистекающие из ложных его предположений. Когда, например, рассматривают кривую как многоугольник с бесконечным количеством малых сторон, продолжение каждой из которых служит касательной к ней, то явным образом делают ложное допущение. Но ошибка погашается при вычислении другой ошибкой, ибо полагают равными нулю количества бесконечно малые». О взаимной компенсации пишут и Фиорентино и другие.

Однако дать синтез теории пределов и исчисления бесконечно-малых еще не удается. Между тем алгорифм Лейбница обладает огромной притягательной силой. На защиту его и выступает со своими «Размышлениями о метафизике исчисления бесконечно-малых» (1797 г.) Лазарь Карно.

6

С современными философскими мерками затруднительно точно установить, к какой школе следовало бы отнести Карно как философа математики. Этому препятствуют и колебания

суммированием геометрической прогрессии видно, что переменная не достигает предела. Определение суммы бесконечной геометрической прогрессии как предела проведено вполне по-современному. В статье, из которой взята эта цитата («Encycl.», т. IX, 1765, «Limite»), указывается, что предел произведения двух множителей равен произведению их пределов и т. п.



Медаль, выбитая в честь Лазаря Карно
во время «ста дней»

его в ряде вопросов. Но, во всяком случае, можно сказать, что строгого единства в его взглядах не имеется: напротив того, довольно отчетливый эклектизм характеризует весь его труд. Самый подход его к проблемам обоснования анализа, та позиция, которую занимает Карно по отношению к последнему, носят достаточно определенный «прагматический», «инструментальный» отпечаток. Когда он рассматривает основные понятия алгебры, он проявляет себя убежденным «фикционалистом», но зачислить его по этому ведомству, как то делает Файхингер, также нельзя, ибо при разборе исчисления бесконечно-малых он покидает фикционалистскую позицию для полуматериалистической.

Математика представляется Карно лишь некиим орудием, назначение которого — помочь нашему воображению, искусственным приемом, придуманным, чтобы возместить слабость нашего разума. Употреблять его приходится с известным сожалением: никогда аналитическое выражение предмета не может быть столь же отчетливым, как его непосредственное восприятие, тем более, что это аналитическое выражение может заключать мнимые, ложные понятия или невыполнимые действия. Некоторые величины, правда, реальны и пригодны для описания явлений, но зато другие алгебраические символы — фиктивны, «не могут ни существовать, ни быть понятыми», и употреблять их можно лишь в качестве посредствующих звеньев цепи рассуждений, облегчающих изучение отношений между истинными количествами и обязательно выпадающих в процессе вычисления. Но и диференциальное и интегральное исчисления — лишь искусственные приемы, хотя бесконечно-малые — реальные переменные величины. В действительности люди встречаются исключительно с так называемыми «означенными» — конечными и определенными величинами; все диференциалы и интегралы должны, в конце концов, быть исключены, с тем, чтобы результирующие уравнения состояли из означенных количеств.

Руководящим критерием при выборе или при отказе от того или иного метода служит правило: «всегда следует вы-

бирать простейший путь, а при одинаковых трудностях наиболее ясный; ни одно средство не должно быть исключено» (§ 163). И если Карно, отдав дань работе Лагранжа, решительным образом не соглашается стать на его точку зрения, то главная причина тому — новизна алгорифма. Предпочесть теорию аналитических функций обычному анализу — это означает отказаться от приемов, всем привычных, вошедших в плоть и кровь математиков, и оказаться вынужденными переработать все ранее сделанное. На подобной же позиции стоит Карно и тогда, когда ему приходится произвести выбор между исчислением бесконечно-малых и исчислением исчезающих величин (Эйлер).

В этом последнем бесконечно-малые рассматриваются как нули, обладающие, правда, некоторыми особыми свойствами: отношение двух нулей $\frac{0}{0}$ не представляется произвольной величиной, а обладает единственным значением, определяющимся тем законом, по которому непрерывно приближаются к нулю приращения исследуемых величин. По мнению Карно, можно, если угодно, принимать бесконечно-малые и за абсолютные нули и за настоящие количества. «Никто ведь, — говорит он, — не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя последние суть только алгебраические формы и гиероглифы нелепых количеств... Не все ли равно, в самом деле, будут ли исчезающие величины химерическими понятиями (étres imaginaires), раз их отношения не таковы и раз нас интересуют только эти отношения» (§ 150). Тем самым он отводит возражения Лагранжа, для которого деление нулевых количеств представляется очень сомнительным и неясным действием. Обе точки зрения на анализ, согласно автору «Размышлений», в общем правомерны, и каждая обладает известными достоинствами: так, в исчислении исчезающих величин последними можно пренебрегать в уравнениях по сравнению с конечными без дальнейших объяснений, как нулями, между тем как в анализе бесконечно-

малых подобная операция нуждается в особом расследовании и обосновании. Преимущество отдается в итоге исчислению бесконечно-малых, но лишь по следующим соображениям. В первую очередь совершенно нет необходимости ограничивать область изменения бесконечно-малых, приравнивая их к нулю. Вопрос может быть успешно разрешен более изящным способом при том более широком допущении, что бесконечно-малые — это величины, которые можно сделать меньше любой другой заданной величины. А кроме того, и нашему воображению проще приспособиться к методу, оперирующему действительными количествами, а не нулями. В каком отношении находится анализ к действительности — для Карно не столь уж важно: он полезен и плодотворен, и требуется лишь содействовать максимальному прогрессу того из методов анализа, который наиболее эффективен.

Любопытно, что Карно в своей оценке ряда исходных понятий математики по-разному подходит к анализу и к алгебре. Как алгебраист, он нередко «фикционалист». Ряд основных объектов, с которыми имеет дело алгебра, ему представляются чисто рассудочными и бессмысленными. Алгебра даже более неясна и туманна в своих принципах, чем анализ, ибо в ней мы орудуем с такими абсурдными вещами, как мнимые и отрицательные количества.

Отрицательные количества ко времени французской революции находились в довольно почетном уже возрасте и тем не менее многим казались подозрительными. Даламбер, полагавший, что о них вообще трудно составить представление, рассматривал их как вычитаемые количества, не обладающие самостоятельным существованием. Для Карно отрицательные числа — фикции, не лучше мнимых. Они получаются при помощи невыполнимых действий, и говорить, что это количества, меньшие нуля или же противоположные абсолютным, положительным, — значит вносить в вопрос путаницу и неясность. «Что такое, — спрашивает он, — противоположные количества?» Несостоятельна и апелляция к разговорным оборотам. В беседе можно сказать, что проигрыш — это отри-

цательный выигрыш, но в математике выражаться образно недопустимо. Отрицательные величины, конечно, не изгоняются Карно из математики, но он их сохраняет лишь как подсобные формы, не имеющие права фигурировать в ответе на поставленную задачу. В дополнении к «Размышлениям» и в другой большой работе Карно, «Геометрии положения» (сыгравшей большую роль в развитии новой геометрии), подробно излагается учение об отрицательных числах, и вывод, к которому приходит Карно, таков, что отрицательные (как и мнимые) корни никогда не бывают действительными решениями предложенного вопроса, но лишь простыми указаниями на вопросы, более или менее отличные от первого; часто они даже являются лишь ничего не обозначающими алгебраическими формами, вошедшими в результате алгебраических преобразований в сочетание с действительными корнями. Но не следует все-таки пренебрегать этими непостижимыми выражениями (formes inintelligibles); ими можно пользоваться как вещественными формами, потому что возможно их заставить исчезнуть с помощью простых алгебраических преобразований, и тогда останутся лишь формулы явные и непосредственно приложимые к предложенному предмету.

Зато главное понятие анализа — бесконечно малое количество — вполне реально. Бесконечно-малые — это вовсе не метафизические и абстрактные понятия, на что как будто указывает это короткое их наименование, но действительные произвольные количества, которые могут становиться столь малыми, сколь угодно. В нескольких местах Карно настойчиво повторяет, что в его понимании бесконечно-малые, в противовес отрицательным числам, настоящие величины. И даже об исчезающих величинах он говорит, что они «по крайней мере — пределы действительных количеств и, так сказать, соприкасаются с бытием (touchent pour ainsi dire á l'éxistence)» (§ 150).

Вторая часть «Размышлений» уделена подробному разбору отдельных направлений анализа и с философской и с чисто

математической стороны. В результате их сравнительного исследования Карно приходит к выводу, что все эти «методы являются, собственно говоря, только одним и тем же методом, рассматриваемым с различных точек зрения[1] Это — все тот же метод исчерпывания древних, более или менее упрощенный, более или менее удачно приспособленный к нуждам исчисления и, наконец, приведенный к регулярному, упорядоченному алгорифму» (§ 159).

Метод исчерпания, например, состоит в том, что геометрическая фигура аппроксимируется вписанными и описанными правильными многоугольниками или иными фигурами, свойства которых уже знакомы, и изучение ее опирается на знание именно этих свойств. Так, известное правило, что площади правильных многоугольников относятся, как квадраты их апофем, переносится и на окружности и т. п. Доказательством при этом служит reductio ad absurdum, т. е. доказательство того, что предположение об отсутствии у данной фигуры известных свойств приводит к противоречию. И вот, хотя в этом методе не пользуются ни бесконечно-малыми, ни понятием предела (почему он и опирается на reductio ad absurdum), но Карно показывает, что он следует теми же, в основном, этапами, что и исчисление бесконечно-малых. И в том и в другом случае мы имеем дело со вспомогательной системой известных количеств, которая, с одной стороны, связана определенным образом с той системой свойства которой мы стремимся познать, а с другой, — настолько произвольна, что ее можно сколь угодно близко приближать к изучаемой системе с тем, чтобы при помощи индукции познать искомое отношение.

---

[1] Согласиться с этим нельзя, разумеется, да и у Карно нет достаточной ясности в этом вопросе. Из того, что было сказано о методе исчезающих количеств, видно, что и для него этот метод в философском отношении принципиально отличен от метода бесконечно-малых, хотя оба они идут теми же математическими путями и даже пользуются одинаковыми обозначениями и т. д.

Также и метод пределов эквивалентен исчислению бесконечно-малых. Предѐл какого-либо количества есть ведь та постоянная, к которой это количество непрерывно приближается таким образом, что разность между ними может стать сколь угодно малой. Очевидно, что разность между пределом и стремящимся к нему количеством и есть то, что называется бесконечно-малым. Понятие предела не более и не менее трудно определить, таким образом, чем понятие бесконечно малого количества, и, следовательно, ошибочно полагать, будто метод пределов более строг, нежели обычный анализ бесконечно-малых. И метод флюксий, опирающийся на понятия первых и последних отношений, т. е. пределов, по существу является тем же методом бесконечно-малых, или же способом исчерпания, рассматриваемым под иным углом зрения. Те количества, которыми пренебрегают в исчислении бесконечно-малых, в ньютоновом алгорифме подразумеваются, заключаются в невыявленном виде.

Поскольку все концепции анализа для Карно с принципиальной стороны одинаковы, постольку вопрос о наиболее пригодной для использования стоит в чисто утилитарной плоскости. Пальма первенства отдается творению Лейбница, хотя Карно совсем не намерен отбросить, как ненужную ветошь, другие приемы анализа. Каждый из них может оказаться пригодным в том или ином случае, помочь при решении какой-либо задачи, облегчить и упростить доказательство. Но для общего и обычного употребления лейбницев анализ, с его символикой и с видоизмененными, уточненными определениями некоторых понятий, предпочтительнее. Об этом красноречиво говорят успехи математики, достигнутые продолжателями Лейбница. В пользу его свидетельствует и сравнение его с каждым из других методов в отдельности. Проблема решается в нем более обще, например, чем в методе исчезающих величин. А перед методом пределов он обладает тем преимуществом, что в первом дозволяется оперировать лишь отношениями, пределами, и в силу этого он лишается тех способов комбинирования

и преобразования выражений, которые обеспечивают анализу бесконечно-малых его силу. Карно замечает также, что в математике «символы не являются только записью мысли, средством ее изображения и закрепления, нет, они воздействуют на самую мысль, они до известной степени направляют ее, и бывает достаточно переместить их на бумаге, согласно известным очень простым правилам, для того чтобы безошибочно достигнуть новых истин» (§ 159),— и опять-таки признает лучшей систему лейбницевых обозначений.

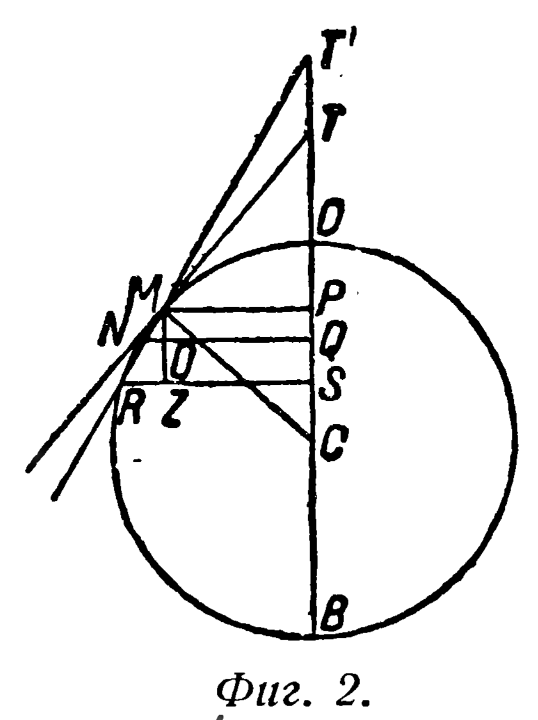
7

У Карно остается, таким образом, одна последняя задача. Нужно доказать полную строгость исчисления бесконечно-малых. Основной принцип Лейбница постулирует, что конечную величину в вычислениях можно заменить другою, если они отличаются между собою бесконечно мало. Сам творец анализа и его ученики ограничились, однако, лишь тем, что показали на деле величайшую плодотворность этого принципа. Но они по существу не дали теоретического доказательства его применимости и не решили окончательным образом основного вопроса — есть ли этот метод абсолютно точный или же лишь способ приближенных вычислений, — а помимо того, не дали удовлетворительного определения бесконечно малого количества. Что касается бесконечно-малого, то уже указывалось, что для Карно оно является очень простым и вполне рациональным понятием, освобожденным от тех противоречивых свойств, какие ему приписывались прежде. Он на первой же странице книги отметает туманное представление о нем, «которое составляется обыкновенно», и определяет бесконечно-малую как «величину, которую можно сделать сколь угодно малой», не изменяя конечных количеств, отношения между которыми ищут (§ 1). И dx и dy—диференциалы — бесконечно-малые единственно потому, что сколь малыми себе их ни мыслить, их можно рассматривать еще меньшими.

Иллюстрацией хода мыслей Карно могут служить некоторые встречающиеся в «Размышлениях» примеры.

Требуется определить у окружности радиуса r, с центром C, подкасательную TP. Линия BCD служит осью абсцисс, а началом координат является D, точка пересечения оси абсцисс и окружности. Касательная проходит через точку $M(x, y)$ и пересекается с осью абсцисс в T[1].

Геометрически легко показать, исходя из подобия треугольников CPM и MPT, что $TP = \frac{(MP)^2}{CP} = \frac{y^2}{r-x}$. Это совершенно точное равенство. Для аналитического решения задачи Карно поступает так. В точке M проводится секущая, пересекающаяся с окружностью в точке R и осью x-ов в T'. Из точек R и M опускаются на ось абсцисс перпендикуляры RS и MP, из M опускается на RS перпендикуляр MZ и доказываются без труда равенства:



Фиг. 2.

$$T'P = MP \frac{MZ}{RZ} \quad (1)$$

и

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2(r-x) - MZ} \quad (2)$$

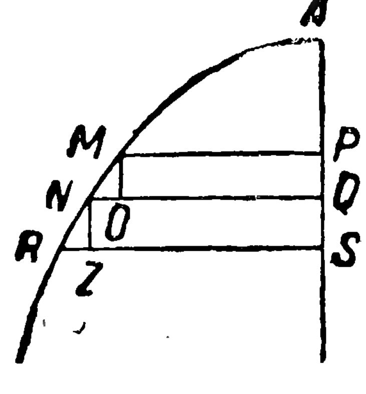
(так как произведения отрезков хорд, пересекающихся в окружности равны). Представим себе теперь, что прямая RS перемещается параллельно самой себе по направлению к MP; тогда, очевидно, T' будет приближаться к T, причем отрезок $T'T$ может быть сделан сколь угодно малым, если только достаточно сблизить точки R и M В равенстве (1) пренебрежем TT', частью $T'P$; точно так же в первой части равенства (2) откинем уменьшающиеся при сближении точек R и M величины MZ и RZ. Обе совершенные нами ошибки могут быть сделаны сколь угодно малыми. Здесь Карно делает основное допущение:

---

[1] Любопытно известное сходство этого примера с примером Беркли.

он предполагает, что полученные им неверные уравнения $TP = MP\frac{MZ}{RZ}$ и $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{r-x}$ справедливы, и получает из них известное уже решение $TP = \frac{y^2}{r-x}$.

Интегральное исчисление, по Карно, также опирается на применение этого метода «компенсации ошибок», как и весь, впрочем, анализ. Если, например, мы пишем, что площадь AMP, ограниченная параболою, уравнение которой $y^2 = px$ и осью абсцисс, определяется равенством $AMP = \frac{2}{p}\int y^2 dy + C$, то мы совершаем ошибку, ибо интеграл есть лишь сумма трапеций $PMOQ$ и отличается от площади AMP на сумму всех криволинейных треугольников MNO. Точно так же неточно и утверждение, что $\frac{2}{p}\int y^2 dy = \frac{2y^3}{3p}$.



Фиг. 3

Но мы принимаем неверные уравнения за правильные и находим строго точное решение задачи:

$$AMP = \frac{2}{3p}\int y^2 dy + C = \frac{2}{3}xy + C.$$

Существо анализа бесконечно-малых и сводится, согласно Карно, к тому его парадоксальному свойству, в силу которого он из неверных посылок извлекает абсолютно достоверные следствия. Анализ — вовсе не способ аппроксимации, и полученные с его помощью конечные результаты не заключают даже и бесконечно малой погрешности — он есть искусство вспомогательного употребления бесконечно малых количеств для разыскания соотношений, существующих между предложенными количествами.

В чем же, собственно говоря, дело? Чем объясняется такая замечательная способность нового метода? Карно дает на это следующий ответ. Очевидно,— говорит он, — анализируя пример с подкасательной, что ошибка, если она только имеется

в уравнении $TP = \frac{y^2}{r - x}$, вытекающем из уравнений (1) и (2), может быть сделана сколь угодно малой, ибо таковыми могут быть сделаны погрешности этих исходных уравнений, и она зависит (если она существует, опять-таки) от расстояния между точками M и R. Но это невозможно, ибо точка M фиксирована совершенно определенно и все четыре количества r, x, y и TP также определены и не могут изменяться в зависимости от величины дуги MR. Компенсация ошибок и проявляется в том, что в конечном решении отсутствуют величины MZ, RZ и TT'.

В немногих параграфах Карно методически излагает основные элементы своей системы. Все величины, которыми оперирует анализ, он делит на два класса. В первый входят «означенные количества» — постоянные и те переменные, которым мы придаем определенные размеры. Эти количества являются в задаче данными или искомыми. Ко второму относятся «количества неозначенные», размеры которых не фиксируются на протяжении всего процесса вычисления: к ним принадлежат бесконечно большие и малые и все, так сказать, становящиеся величины, вроде суммы конечного числа и бесконечно-малого и т. п. В соответствии с этим и уравнения разбиваются на две группы. В противоположность абсолютно точным уравнениям между означенными величинами он называет «несовершенными» такие, «строгая точность которых не доказана, но о которых известно, что погрешность, если только она существует, может быть предположена сколь угодно малой». Исчисление бесконечно-малых и состоит в образовании взамен точных уравнений несовершенных, обязательно при этом элиминирующихся в ходе вычислений.

Сформулировав задачи и метод исчисления бесконечно-малых и определив ряд других понятий (бесконечно-большого, порядка малости величины и т. д.), Карно устанавливает следующий фундаментальный принцип: разность двух непроизвольных количеств есть количество непроизвольное.

Затем он выводит пять основных теорем о свойствах означенных и бесконечно малых количеств, по существу совпадающих с начальными теоремами современного анализа. В заключение им выставляется следующая теорема, «содержащая всю теорию бесконечного»: «чтобы быть уверенным, что какое-нибудь уравнение является необходимо и строго точным, достаточно убедиться, во-первых, в том, что оно было выведено из истинных или по крайней мере несовершенных уравнений при посредстве таких преобразований, которые не лишили их характера по меньшей мере несовершенных уравнений, и, во-вторых, в том, что оно не заключает в себе более ни одного неконечного количества, т. е. какого-нибудь количества, отличного от тех, соотношения между которыми предлагалось найти» (§ 34). Теорема доказывается тем, что ошибки результирующих уравнений, в силу ее первого условия, если и существуют, то могут быть сделаны сколь угодно малыми, т. е. в худшем случае эти уравнения будут несовершенными (а не абсолютно ложными); между тем, согласно условию второму, результирующие уравнения не содержат неозначенных количеств и поэтому не могут быть и несовершенными; следовательно, они безусловно точны.

В последующем изложении Карно дает определения диференциала и интеграла, доказывает некоторые основные теоремы обоих исчислений, снабжая теорию многочисленными примерами, и бегло останавливается на вариационном исчислении.

Та самая компенсация ошибок, о которой говорили Беркли, Лагранж и др., снова, таким образом, встречается у Карно. «Анализ есть не что иное, как исчисление компенсирующихся погрешностей». Но имеется кое-что специфическое в отношении Карно к компенсации. У Карно мы имеем дело не просто с чисто числовой компенсацией погрешностей. Компенсация приобретает особый, качественный, так сказать, характер. Величины становящиеся принимаются за ставшие, неравенства принимаются за равенства. Неправильные, вернее, не вполне правильные («несовершенные», по терминологии Карно), исходные уравнения доставляют истин-

ные результаты в процессе своеобразного «снятия». И вместе с тем в этом оригинальном явлении Карно видит не недостаток анализа и не объяснение случайной достоверности отдельных доказательств, а как раз его движущее, творческое начало; противоречие, узаконенное и возведенное в принцип, оказывается прогрессивным, ведет науку вперед[1].

Несомненной заслугой Карно была борьба с направленными против исчисления бесконечно-малых устремлениями его времени. Он оказался одним из «организаторов победы» не только революции, но и того научного переворота, который подготовлялся в XVIII в., а совершен был в XIX в. И нельзя не оценить достаточно высоко ту принципиально-теоретическую постановку проблемы обоснования анализа, какая им была дана, значение его попыток строго дедуктив-

---

[1] Любопытно, что Гегель, посвятивший в «Науке логики» проблеме обоснования анализа несколько десятков страниц, несмотря на известную свою антипатию к Ньютону, определенно высказывается все же в пользу английского ученого против воззрений Лейбница, развиваемых и защищаемых Карно. Книга Карно, правда, получает у Гегеля высокую оценку. «Объяснения, которые Карно дает методу бесконечных величин, являются наиболее очищенным и ясно изложенным изо всего, что содержится в вышеупомянутых представлениях»,—говорится в «Науке логики». Некоторые идеи Карно симпатичны Гегелю. Так, ему импонирует мнение Карно, что различные течения анализа принципиально равнозначны. По Гегелю также различные трактовки основных понятий анализа лишь более (Ньютон) или менее (Лейбниц) совершенным образом выражают понятие истинного математического бесконечного. Но в основном позиция автора «Размышлений» Гегеля не удовлетворяет. «При переходе к самым действиям, — пишет в «Науке логики» Гегель, — и у него (т. е. Карно) выступают более или менее обычные представления о бесконечной малости опускаемых членов сравнительно с другими. Он оправдывает метод более фактом правильности его результатов и пользою, приносимою для упрощения и сокращения вычисления употреблением, как он их называет, несовершенных уравнений, т. е. таких, в которых допущено такое арифметически неверное опущение, чем природою самого дела».

ного, систематического изложения его начал и те четкие формулировки, которые он дает в определении бесконечно малой величины и других. Несомненное значение имеет и раздельный анализ теории флюксий и теории пределов, показывающий, что их можно брать независимо друг от друга. Но вместе с тем в воззрениях Карно гнездятся и серьезные недостатки. Уже исходное представление его об интегралах и диференциалах как о становящихся приближенных вспомогательных выражениях, обязательно исчезающих из конечных результатов, плохо согласуется с той важнейшей идеей Лейбница, согласно которой новое исчисление есть анализ трансцендентных величин. Как правильно замечает И. Тимченко [1], «неопределенные вспомогательные диференциалы Карно, непременным условием законного существования которых является их исчезновение из конечных определенных результатов, не могут быть введены как элементы выражений sui generis для таких результатов в области трансцендентных величин без существенных изменений в самих принципах теории Карно».—Далее, у Карно по сути дела отсутствует полное объяснение компенсации ошибок. Хотя он и доказывает, что ошибки в конечных уравнениях, из которых элиминированы «неозначенные количества», т. е. бесконечно-малые, не будет, и этим post factum узаконивает отбрасывание последних, но он не выясняет до конца причин, обосновывающих необходимость этого отбрасывания и оправдывающих его. И он не мог заметить этих причин, ибо они коренятся как раз в предельных переходах.

Главная черта труда Карно — в его двойственности. Зеркало конца эпохи, «Размышления» выпукло рисуют философию математики на континенте и ее колебания перед началом нового века и новой эры в истории математики. Одной стороной своей они обращены к прошлому.

---

[1] И. Тимченко, Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций, т. I, стр. 367.

Вышедшие в 1797 г., сто лет спустя после первого учебника исчисления бесконечно-малых, «Размышления» подводят итоги работе лейбницевой математики и резюмируют XVIII в. Карно дает нуждавшемуся в обосновании анализу ту основу, которая наиболее близка по духу практике исчисления бесконечно-малых и ее враждебной теории пределов философской настроенности. Он объясняет получение истинных результатов из ошибочных положений, не устраняя ничего из обычной инфинитезимальной системы и ничего не прибавляя к ней — якобы извне, от Ньютона, — притом объясняет со свойственной не одному ему в то время прагматической точки зрения. С другой стороны, хотя и в меньшей степени, «Размышления» служат преддверием XIX в. И дело здесь не только в ясности постановки вопроса, определений и пр. Дело еще в том, что, несмотря на недоверие к методу пределов, который, как боится Карно, мешает пользоваться теми выражениями, которые «обеспечивают анализу бесконечно-малых его силу», этот страстный лейбницианец уже признает его силу и формально-логическую прочность и близость понятий предела и бесконечно-малого. Карно нужно было сделать один шаг и он бы увидел, что обоснование анализа гораздо проще, глубже и плодотворнее можно осуществить с помощью метода пределов. Более того, истинный смысл всех его пяти теорем и основной теоремы о бесконечном можно раскрыть — и это легко осуществить — с точки зрения перехода к пределу. Но как бы там ни было, его «Размышления» прошли мимо этих, не вполне созревших идей, и честь создания нового фундамента математики не выпала на долю Карно.

XIX в., как известно, пошел в другом направлении. Не побоявшись объединить идеи обеих школ, предел и алгорифм исчисления бесконечно-малых, Коши и иные ученые создали то стройное здание анализа, в котором новые логические трещины появились лишь много десятилетий, чуть ли не век спустя — почти на наших глазах.

* * *

Несколько слов о печатаемой работе Карно.

Настоящий труд впервые был опубликован в 1797 г. в «Oeuvres mathématiques du citoyen Carnot». В предисловии к «Размышлениям» Карно писал:

«Прошло уже несколько лет с тех пор, как автор этих размышлений изложил их в том виде, в каком он их предлагает ныне. Важные заботы, возложенные на него в настоящее время, не позволяют ему возвратиться к прежним мыслям. Но так как все предвещает новый расцвет математических наук, то автор полагает, что было бы полезно опубликовать работу, в которой подробно и ясно исследована метафизика диференциального исчисления и сопоставлены те различные точки зрения, с которых рассматривали ее».

В последующих изданиях объем книги значительно увеличился. Были написаны целые новые главы, гораздо более подробно рассматривающие различные точки зрения на исчисление бесконечно-малых, включены разделы о вариационном исчислении, о теории аналитических функций и т. д. Основные идеи и доказательства, однако, никаких существенных изменений не претерпели. Русский перевод сделан с последнего французского издания.

Я исправил, между прочим, целый ряд опечаток в математических формулах, встречающихся, повидимому, во всех французских изданиях.





ЛАЗАРЬ КАРНО

РАЗМЫШЛЕНИЯ О МЕТАФИЗИКЕ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ



OEUVRES MATHEMATIQUES

DU

CITOYEN CARNOT,

Membre du Directoire exécutif de la République française et de l'Institut National, ancien Capitaine au corps royal du Génie.

Avec le portrait de l'auteur et une planche.

A BASLE

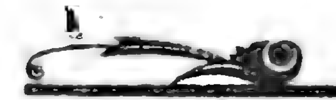
chez J. DECKER, Imprimeur-Libraire,

1797

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ КНИГИ КАРНО, В КОТОРОЙ ВПЕРВЫЕ БЫЛИ НАПЕЧАТАНЫ ЕГО «Réflexions»

Я стараюсь познать, в чем состоит истинный дух исчисления бесконечно-малых; размышления, которые я предлагаю по этому предмету, распределены в трех главах: в первой я излагаю общие принципы анализа бесконечно-малых, во второй я исследую, каким образом этот анализ был приведен к алгорифму через открытие диференциального и интегрального исчислений, в третьей я сравниваю этот анализ с другими методами, которые могут его заместить, как метод исчерпывания, метод неделимых, метод неопределенных и так далее.






ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

1. Нет ни одного открытия, которое произвело бы в математике столь счастливый и быстрый переворот, какой был сделан анализом бесконечно-малых; ни одно другое открытие не доставило более простых и более действительных средств для проникновения в познание законов природы. Расчленяя тела, так сказать, на их составные элементы, оно как бы показало их внутреннее строение и образование. Но так как все, что является крайним, ускользает от чувств и воображения, то оказалось весьма трудным составить себе истинное представление об этих элементах, особых видах бытия, которые то играют роль истинных количеств, то должны рассматриваться как абсолютное ничто и по своим двусмысленным свойствам как бы занимают среднее

место между величиной и нулем, между бытием и небытием [1].

По счастью эти трудности не повредили успеху открытия: существуют такие первичные идеи, которые всегда оставляют в сознании некоторую неясность, но первые же следствия которых, однажды из них извлеченные, открывают поле, обширное и легкое для исследования. Таковой явилась идея беско-

---

[1] Я здесь имею в виду те неопределенные идеи, которые обыкновенно составляют себе о величинах, называемых *бесконечно малыми,* когда не берут на себя труда исследовать их природу; но в действительности нет ничего более простого, чем точное понятие величин этого рода. Что представляет собой, на самом деле, величина, называемая бесконечно малой в математике? Не что иное как *величину, которую можно сделать сколь угодно малой, без того, чтобы было необходимо при этом подвергать изменениям те величины, соотношение между которыми ищут.*

Каковы, например, те величины, соотношение между которыми желают получить в случае кривой? Это, не говоря о параметрах, координаты, нормали, подкасательные, радиусы кривизны и т. д. Так вот, dx и dy являются величинами бесконечно малыми не потому, что их рассматривают на самом деле как очень малые, — что совершенно безразлично, — но потому, что их рассматривают способными становиться еще меньше, сколь малыми бы их ни предположили сначала, без того, чтобы было необходимо изменять значения других величин, о которых мы только что говорили и соотношение между которыми мы ищем.

Из одного этого определения следует, что всяким бесконечно малым количеством можно в процессе вычисления пренебрегать по сравнению с количествами, соотношение между которыми отыскивается, нисколько не влияя этим на результат вычисления.

В самом деле, если, например, в процессе вычисления пренебрегают dx или dy по сравнению с каким-нибудь из количеств, соотношения между которыми отыскиваются, как x или y, то ошибка, которую при этом совершают, является сколь угодно малой, потому что всегда возможно сде-

нечности, и многие математики, нисколько, быть может, не углубившие ее понятия, весьма удачно использовали ее. Между тем философы не могли удовольствоваться столь неопределенной идеей: они пожелали докопаться до принципов, но при этом у них самих обнаружился раскол в их мнениях или, скорее, в их способе рассмотрения предмета. Целью данного произведения является сблизить эти различные взгляды, показать их взаимоотношения и предложить новые.

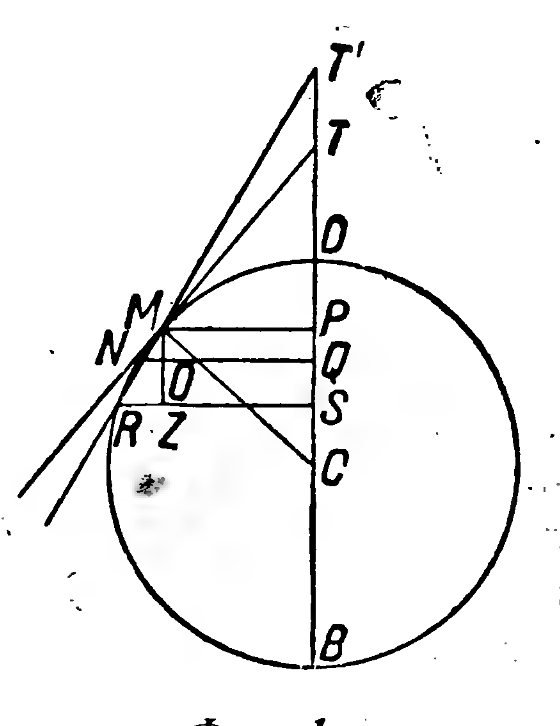
лать dx и dy сколь угодно малыми. Следовательно, если бы эта ошибка отражалась на результате, то ее можно было бы, уменьшая все более и более значения dx и dy, ослабить сколь угодно; следовательно, этот результат необходимо содержал бы dx и dy или какие-нибудь их функции, чего, как известно, нет и не может быть, потому что эти количества не входят в число тех, соотношение между которыми ищется: они участвуют в вычислении только как величины вспомогательные, и вычисление считается законченным только тогда, когда эти вспомогательные количества из него исключены. Следовательно, истинный характер бесконечно малых количеств заключается в следующих двух их свойствах: 1) они всегда могут быть сделаны сколь угодно малыми, 2) они могут быть сделаны такими без того, чтобы надо было непременно изменять в то же время значение количеств, соотношение между которыми ищется. Лишь по недостатку внимания ко второму из этих свойств столь долго оставляли без прямого и удовлетворительного ответа те обманчивые (captieux) возражения, которые столь часто возобновлялись против точности лейбницева метода. Потому что это вовсе не значит дать прямой ответ, когда в каждом отдельном случае ограничиваются вскрытием совпадения результатов этого метода с результатами других строгих методов, как метода исчерпывания, метода пределов или обыкновенной алгебры. Поступать так — это значит обходить трудность и, так сказать, отвергнуть в число второстепенных методов тот метод, который должен занимать первое место как по самой строгости своей теории, не уступающей в этом отношении никакому другому методу, так и по простоте своего приложения, благодаря которой он неоспоримо господствует над всеми другими известными до настоящего времени приемами.

2. Часто встречающееся затруднение точно выразить при посредстве уравнений различные условия проблемы и решить эти уравнения могло породить первые идеи исчисления бесконечно-малых. В самом деле, когда бывает слишком трудно найти точное решение вопроса, то представляется естественным искать, по крайней мере, возможно большее приближение к нему, пренебрегая теми количествами, которые затрудняют выкладки, если только можно предвидеть, что от этого в результате вычислений произойдет лишь незначительная ошибка. Так, например, будучи в состоянии только с большим трудом открывать свойства кривых, придумали рассматривать их как многоугольники с большим числом сторон. В самом деле, если представить себе, например, круг и вписанный в него правильный многоугольник, то очевидно, что хотя эти две фигуры всегда различны и не могут никогда стать тождественными, но они становятся все более и более похожими, по мере того как число сторон многоугольника увеличивается, что, далее, их периметры, их поверхности, тела, образованные вращением их около данной оси, линии, аналогично проведенные внутри и вне этих фигур, углы, образованные этими линиями, и т. п., если и не равны взаимно, то тем более приближаются к равенству, чем больше становится это число сторон; откуда следует, что, предполагая это число сторон очень большим, можно без ощутительной ошибки приписать описанному кругу те свойства, которые будут найдены у вписанного многоугольника.

Сверх того, по мере увеличения числа сторон этого многоугольника, величина каждой из них, очевидно, уменьшается и, следовательно, если предположить, что многоугольник действительно состоит из очень большого числа сторон, то можно также сказать, что каждая из них действительно очень мала.

Таким образом, если в процессе вычисления случайно встретилось бы особое обстоятельство, при котором можно было бы весьма значительно упростить действия, пренебрегая, например, одной из этих малых сторон по сравнению с данной линией, например радиусом, т. е. употребляя в вычислении эту линию вместо того количества, которое было бы равно сумме, составленной из этой линии и упомянутой малой стороны, то ясно, что это без затруднения можно было бы сделать, потому что вызванная этим ошибка оказалась бы крайне малой и не заслуживала бы труда по выяснению ее величины.

3. Пусть, например, требуется в данной точке M (фиг. 1) окружности MBD провести касательную.



Фиг. 1.

Пусть C будет центр круга, DCB — ось, $DP = x$ — абсцисса точки M, $MP = y$ — соответствующая ей ордината, а TP — искомая подкасательная.

Чтобы найти ее, рассмотрим круг как многоугольник с очень большим числом сторон. Пусть MN будет одной из этих сторон; продолжим ее до оси; очевидно, что это и будет искомая касательная, потому что эта линия не проникает внутрь многоугольника. Опустим, сверх того, перпендикуляр MO на NQ, параллельную MP, и назовем a радиус круга; тогда, очевидно, мы будем иметь:

$$MO : NO :: TP : MP, \text{ или } \frac{MO}{NO} = \frac{TP}{y}.$$

С другой стороны, так как уравнение кривой для

точки M есть $yy = 2ax - xx$, то для точки N оно представится в следующем виде:

$$(y + NO)^2 = 2a(x + MO) - (x + MO)^2.$$

Вычитая из этого уравнения первое, найденное для точки M, и производя преобразования, мы получим:

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO}.$$

Приравнивая эту величину $\frac{MO}{NO}$ к той, которая была найдена выше, и умножая на y, получаем:

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

Следовательно, если бы MO и NO были известны, мы получили бы искомую величину TP. Но количества MO и NO весьма малы, потому что каждое из них меньше, чем сторона MN, которая, по предположению, сама весьма мала. Следовательно (2), можно пренебречь без ощутительной ошибки этими количествами по сравнению с количествами $2y$ и $2x - 2a$, к которым они прибавлены. Следовательно, уравнение приводится к $TP = \frac{y^2}{a - x}$, что и требовалось найти.

4. Если этот результат и не является абсолютно точным, то, по крайней мере, очевидно, что на практике он может приниматься за таковой, потому что количества MO и NO чрезвычайно малы. Но человек, совершенно не имеющий представления об учении о бесконечностях, будет, быть может, весьма удивлен, если ему скажут, что уравнение $TP = \frac{y^2}{a - x}$ не

только весьма близко к истинному, но в действительности совершенно точно. Между тем в этом легко удостовериться, определяя TP из того принципа, что касательная в конце радиуса перпендикулярна к нему, ибо очевидно, что подобные треугольники CPM и MPT дают $CP:MP::MP:TP$, откуда следует:

$$TP = \frac{MP^2}{CP} = \frac{y^2}{a-x},$$

как и было найдено выше.

5. В качестве второго примера предположим, что требуется определить площадь данного круга.

Рассмотрим снова окружность как правильный многоугольник с большим числом сторон. Площадь любого правильного многоугольника равна произведению его периметра на половину перпендикуляра, опущенного из центра на одну из сторон; следовательно, если рассматривать круг как многоугольник с большим числом сторон, то его площадь должна быть равна произведению его окружности на половину радиуса, — предложение не менее точное, чем найденный выше результат.

6. Таким образом сколь неопределенными и мало точными ни кажутся, может быть, выражения *очень большое* и *очень малое* или другие им эквивалентные, но из двух предшествующих примеров видно, что их все же не без пользы применяют в математических рассуждениях и что их употребление может оказать большую помощь для облегчения решения различных возможных вопросов. Действительно, если только допустить эти понятия, то все кривые можно будет подобно окружности рассматривать как многоугольники с большим числом сторон, все поверхности можно будет разбить на множество полос или зон, все тела на очень малые

тела, одним словом, все количества можно будет разложить на части той же, что и они, природы. Отсюда происходит много новых взаимоотношений и новых сочетаний и, судя по вышеприведенным примерам, легко представить себе те возможности, которые должно открыть перед математикой (calcul) введение этих элементарных количеств.

7. Но польза, которую они приносят, еще гораздо более значительна, чем можно было сначала ожидать, ибо из приведенных примеров следует, что то, что первоначально рассматривалось только как просто приближенный метод, приводит, по крайней мере в некоторых случаях, к совершенно точным результатам. Поэтому было бы интересно суметь различать те случаи, при которых это происходит, свести к ним, поскольку возможно, другие и, таким образом, превратить этот метод приближения в совершенно точное и строгое исчисление. В этом и состоит предмет анализа бесконечно-малых.

8. Рассмотрим сначала, каким образом получилось, что, пренебрегая MO и NO в найденном выше (3) уравнении

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO},$$

мы нисколько не нарушили справедливости результата или, вернее, каким образом получается, что этот результат стал точным благодаря уничтожению этих количеств и почему он не был таким прежде.

Очень просто объяснить себе то, что произошло при решении рассмотренной выше задачи. Заметим прежде всего, что раз было ложно то предположение, из которого мы исходили (потому что ведь абсолютно невозможно рассматривать круг как настоящий многоугольник, каково бы ни было число

его сторон), то от этого предположения должна была проистекать некоторая ошибка в уравнении

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

С другой стороны, так как результат $TP = \frac{y^2}{a - x}$ тем не менее совершенно точен, как это доказывается через сравнение двух треугольников CPM и MPT, то в указанном уравнении можно пренебречь MO и NO; это даже должно сделать для исправления вычисления и уничтожения той ошибки, которая была вызвана исходным ложным предположением. Следовательно, пренебрегать количествами этого рода не только представляется позволительным в подобном случае, но это необходимо и это является единственным способом точно выразить условия задачи.

9. Таким образом точный результат $TP = \frac{y^2}{a - x}$ получился только благодаря компенсации ошибок. Эту компенсацию можно выявить еще отчетливее, исследуя рассмотренный выше пример несколько по-другому, а именно, рассматривая круг как настоящую кривую, а не как многоугольник.

Для этого через точку R, произвольно взятую на каком-нибудь расстоянии от точки M, проведем линию RS, параллельно линии MP, и через точки R и M проведем секущую RT'. Тогда, очевидно, мы будем иметь:

$$T'P : MP :: MZ : RZ,$$

или

$$T'P = TP + T'T = MP \frac{MZ}{RZ}.$$

Если теперь мы вообразим, что RS движется параллельно самой себе, непрерывно приближаясь к MP,

то очевидно, что точка T' будет одновременно приближаться все больше и больше к точке T и что, значит, можно будет принять линию $T'T$ сколь угодно малой, не нарушая вышеустановленной пропорции. Следовательно, если я пренебрегу в только что найденном уравнении количеством $T'T$, то, хотя от этого и произойдет ошибка в уравнении $TP = \frac{MZ}{RZ} \cdot MP$, в которое перейдет тогда первое уравнение, но эта ошибка может быть сколь угодно уменьшена, если заставить RS должным образом приблизиться к MP, т. е. правая и левая части последнего уравнения будут отличаться друг от друга сколь угодно мало.

Подобным же образом мы имеем:

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

и это уравнение является совершенно точным, каково бы ни было положение точки R, т. е. каковы бы ни были величины MZ и RZ. Но чем более RS будет приближаться к MP, тем меньше будут становиться линии MZ и RZ и, следовательно, если пренебречь ими во второй части уравнения, то ошибка, получающаяся от этого в уравнении

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x},$$

в которое тогда оно перейдет, может, как и выше, быть сделана столь малой, как это потребуется.

Поэтому, не заботясь об ошибках, которые я всегда могу сколь угодно уменьшить, я рассматриваю оба найденных уравнения

$$TP = MP \frac{MZ}{RZ} \quad \text{и} \quad \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x}$$

как совершенно точные; подставляя в первое урав-

нение значение $\frac{MZ}{RZ}$ из другого, я получаю в результате, как и выше, $TP = \frac{y^2}{a-x}$.

Этот результат является совершенно точным, потому что он согласуется с тем, который был получен через сравнение треугольников CPM и MPT, а между тем уравнения

$$TP = y\frac{MZ}{RZ} \quad \text{и} \quad \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

из которых он был получен, оба являются безусловно ложными, потому что расстояние от RS до MP не предполагалось ни равным нулю, ни даже очень малым, а просто равным какой-нибудь произвольной линии. Следовательно, совершенно необходимо, чтобы ошибки взаимно погашались через сравнение двух ошибочных уравнений.

10. Таким образом наличие взаимно погашающихся ошибок является прочно установленным и вполне доказанным фактом. Теперь требуется его объяснить и отыскать признак, по которому можно было бы распознавать, что в вычислениях, подобных предыдущему, имеет место компенсация, а также найти средства произвести ее в каждом отдельном случае.

Для этого достаточно заметить, что так как ошибки, допущенные в уравнениях

$$TP = y\frac{MZ}{RZ} \quad \text{и} \quad \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

могут быть сделаны сколь угодно малыми, то та ошибка, которая имела бы место в результирующем уравнении $TP = \frac{y^2}{a-x}$, могла бы, равным образом, быть сделана сколь угодно малой, и что она зависела бы от произвольного расстояния линий MP и RS. Но

это не так, потому что точка M, через которую должна проходить касательная, дана, и ни одно из количеств a, x, y, TP в этом уравнении не является произвольным; следовательно, на самом деле никакой ошибки в этом уравнении быть не может.

Отсюда следует, что компенсация ошибок, заключавшихся в уравнениях

$$TP = y\frac{MZ}{RZ} \text{ и } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

обнаруживается в результате тем, что в нем отсутствуют количества MZ и RZ, которые причиняли эти ошибки. Следовательно, после того как эти количества ввели в вычисления для облегчения выражения условий задачи и приняли их в уравнениях, которыми выражены эти условия, ради упрощения уравнений, исчезающими (nulles) по сравнению с данными количествами, — после этого остается только исключить их из тех уравнений, в которых они могут еще находиться, чтобы заставить исчезнуть те ошибки, которые они породили, и получить совершенно точный результат.

11. Словом, творец метода мог притти к своему открытию благодаря очень простому рассуждению: если вместо предложенного количества, мог бы он сказать себе, я употребляю в вычислении другое количество, которое не равно первому, то отсюда проистечет некоторая ошибка, но если разность между употребляемыми одно вместо другого количествами произвольна и если я волен сделать ее сколь угодно малой, то эта ошибка не будет опасна. Я могу даже без всякого неудобства допустить за раз несколько подобных ошибок, потому что я всегда могу сообщить моим результатам ту степень точности, которую я пожелаю. Более того, может случиться, что эти ошибки взаимно скомпенсируются и что, таким

образом, мои результаты окажутся совершенно точными. Но как произвести эту компенсацию во всех случаях? Для этого требуется небольшое размышление. В самом деле, мог бы сказать изобретатель, предположим на момент, что желаемая компенсация имеет место, и посмотрим, в чем она должна обнаружиться в результате вычисления. Ведь естественно, что если исчезнут количества, которые причинили эти ошибки, то должны исчезнуть и самые ошибки, ибо такие количества, как MZ и RZ, будучи по предположению произвольными величинами, не должны более входить в те формулы или результаты, которые не произвольны и зависят не от воли вычислителя, но единственно от природы тех вещей, соотношение между которыми предлагалось выразить при посредстве этих результатов. Следовательно, признаком, свидетельствующим о наличии желаемой компенсации, является отсутствие тех произвольных количеств, которые порождали эти ошибки; и, значит, для получения этой компенсации необходимо только исключить эти произвольные количества.

Постараемся теперь придать этим идеям подобающую им точность и общность.

Определения

12. Количества разделяются вообще на количества постоянные и переменные.

Количества, которые называют *постоянными* или *определенными*, суть те, значения которых предполагаются вполне установленными; а *переменными* или *неопределенными* количествами называют такие, которым, напротив того, можно последовательно приписывать различные значения.

Надо, однако, заметить, что выражение «переменные количества» не следует брать в абсолютном

смысле, потому что количество может быть более или менее неопределенным, более или менее произвольным; и именно на различных степенях этой неопределенности, которая вообще бывает свойственна количеству, покоится весь анализ и, в частности, та отрасль его, которую называют *анализом бесконечно-малых* (analyse infinitésimale).

13. Я разделяю все количества, допускаемые при вычислении, на три класса: 1) те, которые являются определенными и неизменными по самой природе вопроса, 2) те, которые, будучи сначала переменными, принимают затем определенные значения благодаря последующим соглашениям или гипотезам, 3) наконец те, которые должны оставаться всегда неопределенными.

К первому из этих трех классов принадлежат те количества, которые называются постоянными, или данными (données), как, например, параметры кривых. Ко второму — обыкновенные переменные, как, например, координаты кривых, подкасательные, нормали и т. п., которым приписывают те или другие определенные значения, когда хотят открыть их свойства или соотношения. К третьему классу принадлежат количества, которые, будучи более или менее независимыми от количеств двух первых классов, остаются также более или менее произвольными до тех пор, пока вычисление не будет вполне закончено; их я назову по этой причине *количествами всегда переменными*.

Но хотя количества этого третьего класса и остаются всегда переменными, они все же не вполне произвольны. Подобно тому как простые переменные, составляющие второй класс, связаны с постоянными, составляющими первый класс, при посредстве известных уравнений или условий, в силу которых они могут изменяться только по известным зако-

нам, — подобно этому и *количества всегда переменные* связаны с обыкновенными переменными и данными как через посредство самих условий вопроса, так и через посредство гипотез, на которых основано вычисление, так что они могут изменяться только известным способом.

14. Бесконечно малым количеством я называю всякое количество, которое рассматривается как непрерывно убывающее, так что оно может стать сколь угодно малым без того, чтобы при этом необходимо было изменить те количества, соотношение между которыми отыскивается.

Когда хотят найти соотношение между известными предлагаемыми количествами, из которых одни постоянны, другие переменны, то рассматривают общую систему как достигшую определенного состояния, которое считается установленным; потом эту установленную систему сравнивают с другими состояниями той же системы, которые рассматриваются как непрерывно приближающиеся к первому до тех пор, пока не будут отличаться от него сколь угодно мало. Следовательно, эти другие состояния системы являются сами по себе только вспомогательными системами, которые вводятся для того, чтобы облегчить сравнение между частями первой. Разности между количествами, соответствующими друг другу во всех этих системах, можно предположить сколь угодно малыми, не производя изменений в количествах, которые составляют первую систему и отношение между которыми мы ищем. Поэтому эти разности относятся к категории количеств, которые мы называем *бесконечно малыми*: ведь они рассматриваются как непрерывно убывающие и могущие стать сколь угодно малыми без того, чтобы необходимо было для этого какое-нибудь изменение в значениях тех количеств, соотношение между которыми ищется.

Единица, разделенная на бесконечно малое количество, есть то, что называют *количеством бесконечным*, или *бесконечно большим*.

Под именем *количеств неконечных* (infinitésimales) понимают количества бесконечные и бесконечно малые.

Анализ неконечных величин есть не что иное, как искусство пользоваться помощью неконечных количеств для открытия отношений, существующих между предложенными количествами.

15. Прежде всего ясно, что в качестве простых вспомогательных средств все эти называемые неконечными количества, а также любые их функции необходимо должны быть исключены из результатов вычисления, потому что эти результаты должны быть только выражением соотношений, предписанных условиями предложенного вопроса, и могут содержать только те количества, между которыми существуют эти соотношения. Следовательно, количества, которые употреблялись только в качестве вспомогательных, не должны уже больше в них встречаться. Их привлекли в начале вычисления только для облегчения выражения условий, но когда это выполнено, они не могут уже оставаться в формулах и, значит, необходимо должны быть из них исключены. Кроме того, по самому их существу эти количества можно употреблять только в качестве вспомогательных, потому что они по своей природе всегда являются переменными, даже когда бывают заданы определенные значения тем количествам, соотношение между которыми должен выражать результат вычисления. И если бы они находились в этом результате, то они сделали бы его изменяющимся, в то время как он должен оставаться твердо установленным. Между тем результаты этого нового анализа не могут быть отличными от результатов анализа обыкновенного. Поэтому, так как последний не допускает количеств неконечных, то не-

обходимо, чтобы те количества, которые могут быть допущены в первом, в конце концов, всегда исключались.

16. Из предыдущего видно, что количества, называемые в математике *бесконечно малыми*, не являются ни действительно исчезающими (actuellement nulles) количествами, ни даже количествами действительно меньшими, чем те или иные определенные величины, а только количествами, которым условия данного вопроса и предположения, на которых основывается вычисление, позволяют до тех пор, пока вычисление не будет совсем выполнено, оставаться переменными, причем они уменьшаются непрерывно, пока не сделаются сколь угодно малыми, без того, чтобы представлялось необходимым изменять в то же время значения тех количеств, соотношения между которыми желают получить. Только в этом и состоит истинный характер количеств, которым дано имя *бесконечно малых*, а вовсе не в той малости, которой они будто бы должны были действительно обладать, согласно их наименованию, и не в абсолютной ничтожности (nullité), которую им можно было бы приписать. Мы видим, таким образом, что понятие бесконечно-малых совершенно просто и свободно от всякой неопределенной или спорной идеи.

17. Желая быть кратким, я буду понимать в последующем под именем *количеств означенных* (désignées) все те количества, которые составляют два первых класса, о которых мы уже говорили (13), т. е. все те количества, которые служат предметом обыкновенного анализа и соотношение между которыми желают получить или которые могут входить в результат вычисления. Напротив, *количествами неозначенными* (non désignées) я назову все количества, составляющие третий класс, т. е. те, которые остаются всегда переменными и, следовательно, более или

менее независимы от количеств первых двух классов. Так, например, к неозначенным количествам должны быть отнесены и количества бесконечно малые и бесконечно большие, и на основании данных выше определений легко видеть, что количества бесконечно малые суть не что иное, как неозначенные количества, которые рассматриваются как постепенно и одновременно убывающие, пока они не станут сколь нам угодно малыми.

18. Применим все вышесказанное к уже рассмотренному примеру.

Радиус *MC*, будучи данным (фиг. 1), является количеством определенным с самого начала по самой природе вопроса, т. е. он есть *количество означенное* и принадлежит к первому классу из тех, о которых мы говорили (13).

Линии *DP*, *MP*, *TP*, *MT* сначала — переменные и становятся определенными только благодаря последующему предположению, что касательная должна проходить через точку *M*; но когда это предположение уже принято, все эти количества должно рассматривать как твердо установленные до самого конца вычисления, т. е. они суть тоже количества означенные и принадлежат ко второму классу из тех, о которых мы говорили (13). Таким образом эти количества, которые являются не чем иным, как координатами, касательной и подкасательной кривой в точке *M*, вместе с постоянной *MC* и количествами, которые являются какими-нибудь их функциями, составляют общую систему количеств означенных, т. е. тех, соотношение между которыми ищется и которые одни только и могут входить в результат вычисления и быть предметом обыкновенной алгебры.

Напротив того, линии *DQ*, *NQ*, *TQ*, *T'Q*, *MZ*, *RZ* и т. п. принадлежат к числу тех, которые мы назвали *количествами неозначенными* и которые, оставаясь

всегда переменными, образуют третий из названных нами классов (13). Действительно, мы всегда вправе сделать RZ и MZ сколь угодно малыми, не изменяя значения количеств означенных, о которых мы выше говорили, так что количества MZ и RZ принадлежат к тем, которые мы называем *бесконечно малыми*; другие же количества DQ, NQ, TQ, TP, $T'Q$ являются, очевидно, функциями этих бесконечно малых количеств и, равным образом, остаются всегда переменными и, следовательно, принадлежат к числу тех, которые мы называем *количествами неозначенными*.

19. Два каких-нибудь количества называются *бесконечно мало отличающимися друг от друга* (infiniment peu différentes), когда частное от деления одного на другое отличается от единицы на количество бесконечно малое.

Говорят, что одно количество является *бесконечно малым относительно* другого количества, когда отношение первого ко второму есть количество бесконечно малое. И обратно, второе в этом случае называется бесконечным или бесконечно большим относительно первого.

Отсюда следует, что какое-нибудь количество, даже будучи само бесконечно малым, может быть бесконечно большим *относительно* другого количества, и обратно, даже количество бесконечно большое может оказаться бесконечно малым *относительно* другого. Например, если предположить, что x бесконечно мало, то x^2 будет количеством бесконечно малым относительно первого, хотя это первое само является бесконечно малым, потому что отношение второго к первому есть x, которое по предположению есть количество бесконечно малое.

Подобным же образом, если X представляет собой количество бесконечно большое, оно все-таки будет

есконечно малым относительно X^2, потому что отошение этого последнего к первому будет X, котоое по предположению есть количество бесконечно ольшое.

20. Исходя из указанного факта, можно распределить нзконечные количества по различным порядам. Если x, например, принимается за бесконечно малое количество первого порядка, то x^2 будет бесконечно малым количеством второго порядка, x^3 — бесконечно малым количеством третьего порядка и т. д.

Подобным же образом, если X принимается за бесконечно большое количество первого порядка, то X^2 будет бесконечно большим количеством второго порядка, X^3 — бесконечно большим количеством третьего порядка и т. д.

Два количества какого бы то ни было порядка называются количествами одного порядка, когда их отношение есть количество конечное.

Всякий раз, когда два каких-нибудь количества складываются вместе или вычитаются одно из другого, причем одно оказывается бесконечно малым относительно другого, то это последнее называется *количеством главным* (principale), а первое — *количеством второстепенным* (accessoire). Так, например, в сумме $X + x$ количеств, о которых только что шла речь, X есть количество главное, x количество второстепенное; в сумме $x + x^2$ x есть количество главное, x^2 — количество второстепенное.

21. Так как очень важно, чтобы данные выше различные понятия были хорошо усвоены, то мы остановимся еще на некоторых относящихся к этому вопросу подробностях.

Цель всякого вычисления состоит в нахождении соотношений, существующих между известными заданными количествами. Но затруднения при непосредственном нахождении этих соотношений часто по-

буждают прибегать к посредничеству некоторых других количеств, которые не входят в предложенную систему, но которые, благодаря их связи с первыми (количествами), могут служить в качестве посредствующих (intermédiaires) между ними. Поэтому сперва выражают существующие между всеми ими соотношения, а после, для того чтобы получить искомые соотношения, существующие непосредственно между одними заданными количествами, исключают из вычисления те, которые участвовали в нем как вспомогательные.

Если между этими вспомогательными количествами находятся количества такой природы, что их всех вместе можно сделать сколь угодно малыми, не изменяя вместе с тем заданных количеств, то это обстоятельство дает при случае место весьма важным упрощениям, и именно из таких упрощений выросла отрасль исчисления, называемая *анализом бесконечно-малых*. Последний есть не что иное, как искусство выбирать между подобными вспомогательными количествами наиболее подходящие в различных случаях, пользоваться ими наиболее выгодным способом для выражения условий различных вопросов и затем исключать эти самые количества для того, чтобы в формулах оставались только те количества, соотношения между которыми хотели узнать.

22. Представим себе теперь какую-нибудь систему количеств, из которых одни постоянны, другие переменны и пусть требуется найти какие-либо существующие между ними связи или соотношения.

В качестве исходного пункта наших рассуждений возьмем общую систему в каком-нибудь определенном состоянии, которое мы будем рассматривать как твердо установленное. Исследуем соотношения, которые существуют между различными количествами этой

твердо установленной системы. Эти количества и количества, зависящие от них, мы называем *количествами означенными* (17).

Рассмотрим теперь предложенную систему в каком-нибудь новом, отличном от первого состоянии. Так как каждое из количеств, которые теперь ее составят, будет вспомогательным, раз это новое состояние и воображается только для того, чтобы легче было найти соотношения между количествами, составляющими первую систему, то назовем это новое состояние системы *системой вспомогательной.*

Представим себе, наконец, что эта вспомогательная система постепенно приближается к первой так, что все составляющие ее вспомогательные количества одновременно приближаются к соответствующим им означенным количествам первой системы, причем представляется возможным одновременно предположить все их взаимные разности сколь угодно малыми. Тогда эти взаимные разности и будут тем, что мы назвали *количествами бесконечно малыми* (14).

Так как количества этой второй системы являются чисто вспомогательными, то они не могут входить в результат вычисления, потому что этот результат выражает соотношения, существующие только между теми количествами, которые составляют первую систему. Отсюда следует, что количества бесконечно малые, о которых мы только что говорили, а также все их функции должны необходимо быть исключенными из этого самого результата.

23. Теперь я спрашиваю себя, что бы произошло, если бы в процессе вычисления мы встретили какое-нибудь постоянное количество, сложенное с одним из этих бесконечно малых количеств, и если бы, приняв во внимание, что это последнее количество можно предположить сколь угодно малым, в то время как

первое не изменяется, мы пренебрегли им для упрощения вычислений как не имеющим никакого значения по сравнению с первым количеством.

Естественным заключением, несомненно, было бы то, что порожденную таким образом ошибку можно всегда сделать сколь угодно малой, если все более и более уменьшать произвольное значение пренебрегаемого количества.

Но для этого надо, чтобы либо само это произвольное значение, либо же некоторые из его функций входили в результат данного вычисления; иначе оно не имело бы на него никакого влияния и, следовательно, не могло бы служить его исправлению через свое последовательное уменьшение.

Следовательно, отсутствие его в результате является доказательством того, что ошибка исправилась сама собой, потому что, если бы она еще существовала, то по ходу вычисления она могла бы быть только бесконечно малой; но она не может быть таковой, так как в результате не содержится бесконечно малого количества; следовательно, ошибка, допущенная в процессе вычислений, должна была исчезнуть какимнибудь способом. Следующие предложения это строго докажут.

Основной принцип

24. Два непроизвольных (non arbitraires) количества могут отличаться между собой только на непроизвольное количество.

Доказательство. Так как оба заданных количества не являются произвольными, то ничего нельзя изменить ни в том, ни в другом; следовательно, ничего нельзя изменить и в их разности; следовательно, эта разность непроизвольна. *Что и требовалось доказать.*

Королларий I

25. *Два непроизвольных количества в точности равны, если их предполагаемую (prétendue) разность можно считать сколь угодно малой.*

В самом деле, пусть P и Q будут два данных непроизвольных количества. Мы только что видели, что их разность не может быть произвольной; следовательно, ее нельзя считать сколь угодно малой, ибо это противоречит предположению. Следовательно, эта предполагаемая разность не существует. Следовательно, два предложенных количества P и Q в точности равны.

Королларий II

26. *Для того чтобы убедиться, что два означенных количества в точности равны, достаточно доказать, что их разность, если она существует, не может быть количеством означенным.*

В самом деле, количества означенные являются непроизвольными; следовательно, их разность не может быть произвольной; следовательно, эта разность необходимо есть количество означенное. Таким образом для доказательства того, что эта разность не существует и что, следовательно, количества равны между собой, достаточно доказать, что если бы она существовала, то она не могла бы быть количеством означенным.

Королларий III

27. *Всякое значение, которое можно сделать сколь угодно близким к истинному количеству, которое оно представляет, ничего не изменяя для этого ни в том, ни в другом, является необходимо и строго точным.*

В самом деле, так как не нужно ничего изменять ни в заданном количестве, ни в его значении, для того чтобы сделать это последнее сколь угодно близким к первому, т. е. для того чтобы они отличались друг от друга сколь угодно мало, то и то и другое можно рассматривать как твердо установленные и, значит, как непроизвольные.

Таким образом они подходят под действие короллария II.

Следовательно, они необходимо и в точности равны между собой.

Королларий IV

28. *Всяким количеством, которое можно предположить сколь угодно малым, можно пренебречь как совершенно исчезающим (nulle) по сравнению со всяким другим количеством, которое нельзя подобно первому предположить сколь угодно малым, причем ошибки, которые могут возникнуть при этом (ainsi) в процессе вычисления, не оказывают никакого влияния на конечный результат, если только все произвольные количества будут из него исключены.*

В самом деле, если количествами, которые можно предположить сколь угодно малыми, пренебречь как совершенно исчезающими, когда они прибавляются и отнимаются от других количеств, которые нельзя предположить сколь угодно малыми, то очевидно, что ошибки, которые могут возникнуть при этом в процессе вычислений или оказать воздействие на результат, можно также предположить сколь угодно малыми; следовательно, в этом результате останется нечто произвольное, что противоречит предположению, потому что все произвольные количества предполагаются совершенно исключенными.

Королларий V

29. Всяким количеством, отношение которого к другому количеству может быть предположено сколь угодно малым, можно пренебречь как совершенно исчезающим по сравнению с этим последним, причем ошибки, которые могут при этом возникнуть в процессе вычислений, не оказывают никакого влияния на конечный результат, если только все произвольные количества из него исключены.

Этот королларий есть только обобщение предшествующего. В королларии IV предполагалось, что количества, в сравнении с которыми можно пренебрегать другими, сами не могут быть предполагаемы сколь угодно малыми. В королларии V допускается, что и те и другие могут быть сделаны сколь угодно малыми, но что вместе с тем отношение одних к другим также может быть предположено сколь угодно малым. Вследствие этого, каковы бы ни были те и другие из этих количеств, я утверждаю, что теми из них, отношение которых к другим может быть предположено сколь угодно малым, можно по сравнению с последними пренебречь. Доказательство при этом то же самое, что и для короллария IV, ибо очевидно, что если бы вследствие этого пренебрежения и возникли какие-либо ошибки, то их всегда можно было бы сколь угодно уменьшить или в процессе вычислений или в его результате; но в последнем этого сделать нельзя, потому что тогда в него необходимо входило бы нечто произвольное, что противно предположению, так как все произвольные количества предполагаются исключенными.

30. Предшествующие предложения заключают всю теорию анализа бесконечно-малых, потому что именно те количества, которые, согласно предположениям, лежащим в основе вычисления, могут быть сде-

ланы сколь угодно малыми — чего нельзя сделать с другими количествами общей системы, — мы и назвали *бесконечно малыми*, и ими-то, следовательно, и можно пренебречь в процессе вычисления, как это мы видели выше, не затрагивая этим результата его.

Лейбниц, который первый установил правила исчисления бесконечно-малых, обосновал его на том принципе, что если две конечных величины отличаются между собой только на бесконечно малое количество, то можно по желанию пользоваться одной из них вместо другой. Этот принцип обладал преимуществом крайней простоты и весьма легкой применимости. Его усвоили как своего рода аксиому и удовлетворились взглядом на эти бесконечно малые количества как на количества меньшие, чем все те, которые могут быть оценены и постигнуты воображением. Вскоре этот принцип совершил чудеса в руках самого Лейбница, братьев Бернулли, Лопиталя и др. Однако он не был недоступен возражениям; Лейбница упрекали 1) в том, что он употребляет выражение «бесконечно малые количества» без предварительного их определения; 2) в том, что остается несколько неясным, рассматривает ли он сам свое исчисление как абсолютно строгое, или как простой метод приближения.

Знаменитый творец нового исчисления и известные ученые, которые восприняли его идеи, удовольствовались тем, что при посредстве решения труднейших задач обнаружили плодотворность принципа, постоянное согласие его результатов с результатами обыкновенного анализа и его превосходство над последним. Эти непрерывные успехи доказывали неопровержимым образом, что все возражения были только внешне правдоподобными; но эти ученые все же не дали на них прямого ответа, и основная трудность осталась неразрешенной. Есть истины, которые сразу

поражают все строго мыслящие умы, но точное доказательство которых долго ускользает даже от самых даровитых из них.

«Лейбниц, — говорит Даламбер, — смущенный возражениями, которые, как он чувствовал, можно сделать относительно бесконечно малых количеств в том виде, в каком их рассматривает диференциальное исчисление, предпочел свести свои бесконечно-малые просто к несравнимым, а это уничтожило бы геометрическую точность исчисления».

Но если в чем Лейбниц и ошибался, то единственно высказывая сомнение в точности своего собственного анализа, если только он в действительности имел эти сомнения, что ни в какой степени не представляется вероятным. Он мог ведь ответить:

1. Вы меня спрашиваете, что означает выражение «количества бесконечно малые (infinitésimales)». Я заявляю, что я не разумею под ними каких-то метафизических и отвлеченных видов бытия (êtres métaphysiques et abstraits), на что как будто указывает их сокращенное наименование, но реальные произвольные количества, которые я могу сделать сколь угодно малыми без того, чтобы я был принужден в то же время изменять те количества, соотношения между которыми хочу найти.

2. Вы меня спрашиваете, является ли мое исчисление совершенно точным и строгим. Я утверждаю: да, — если только я сумел исключить из него количества бесконечно малые, о которых я только что говорил, и если я привел его к такому виду, чтобы в нем содержались только обыкновенные алгебраические количества. До этого момента я рассматриваю мое исчисление только как простой метод приближения. Те, кто в целях примирения строгости исчисления в процессе всех его операций с простотой моего алгорифма стали рассматривать бесконечно малые

количества как абсолютно исчезающие (nulles), не могут все же обойтись без того исключения (élimination), о котором я только что говорил. И, не оспаривая справедливости их метафизических соображений, я утверждаю, что они ничего не выигрывают по сравнению со мной в простоте приемов, остающихся теми же самыми, но что они зато наталкиваются на другое затруднение: все члены их уравнений одновременно исчезают, и для вычислений им остаются одни нули и неопределенные отношения вида $\frac{0}{0}$. Не лучше ли принять мои бесконечно малые количества такими, как я сразу их определил, т. е. как меньшие, чем любая возможная (imaginable) величина? Разве легче представить себе, что такое чистые нули? И если рассматривать мои неощутимые (inappréciables) количества как химерические, то разве их нельзя было бы сравнивать друг с другом не хуже, чем эти чистые нули? Лучше ли вы представляете мнимое количество вида $a\sqrt{-1}$, чем количество неощутимое? А между тем колеблетесь ли вы сказать, что отношение $a\sqrt{-1}$ к $b\sqrt{-1}$ есть $\frac{a}{b}$? Не полна ли вся математика подобными загадками? И не эти ли загадки как раз существенно отличают анализ от синтеза и даже доставляют первому драгоценные свойства, которыми не обладает второй? Если я вас спрошу, что означает уравнение, в которое входят мнимые выражения, как, например, в неприводимом уравнении третьей степени, то вы мне ответите, что это уравнение может служить к познанию истинных значений неизвестной только тогда, когда посредством каких-либо преобразований достигнут исключения из него мнимых количеств. Я вам отвечаю то же самое относительно своих неощутимых количеств; я употребляю их только как вспомогательные. Я признаю, что мое исчисление является строго

точным только тогда, когда я достиг исключения их всех; до тех пор оно не закончено и не пригодно к применению. Но разве ваше исчисление является таковым, прежде чем вы его освободили от всех ваших нулей? Более того, стоя на этой новой точке зрения на вопрос, т. е. рассматривая мои вспомогательные количества не как абсолютно бесконечно малые, а только как неопределенно (indéfiniment) малые, я ограждаю свой анализ от каких бы то ни было придирок; я превращаю его в метод не приближения, но компенсации, т. е. метод, который соединяет легкость простого приближенного вычисления с точностью самых строгих методов, и этим показываю, что он есть не что иное, как тот же самый метод исчерпывания, приведенный лишь к алгорифму. Я знаю, что его можно заместить (suppléer) самым методом исчерпывания, или методом пределов, или даже одной обыкновенной алгеброй, но надо знать, способны ли эти другие методы объединить в такой же степени, что и мой, простоту с плодотворностью. Я здесь сошлюсь на знаменитых математиков, которые, предлагая другие методы в теории, на практике пользуются моим.

31. Но если полезно устранить ненужные тонкости, которые скорее могут затормозить движение науки вперед, чем дать ей лучшее основание, то все же необходимо твердо и непосредственно обосновать принципы, на которых основываются, и приемы, которыми пользуются. Первое условие, которое надлежит выполнить в математике, — это быть точным, второе — быть ясным и, насколько возможно, простым.

Есть, например, люди, которые думают, что дают достаточное обоснование принципу анализа бесконечно-малых при помощи следующего рассуждения: очевидно, говорят они, и всеми признано, что те ошибки — если только они существуют, — которые

порождают приемы анализа бесконечно-малых, всегда можно предположить сколь угодно малыми. Очевидно еще и то, что всякая ошибка, которую можно предположить сколь угодно малой, вовсе не ошибка; ибо, если можно ее предположить сколь угодно малой, то ее можно предположить равной нулю. А тогда результаты анализа бесконечно-малых являются совершенно точными.

На первый взгляд правдоподобное, это рассуждение, однако, нисколько не справедливо: ибо нельзя утверждать, что раз можно сделать ошибку сколь угодно малой, то будто бы можно сделать ее совершенно несуществующей. Например, уравнение $\frac{MZ}{RZ}=\frac{y}{a-x}$ (9) является уравнением всегда ложным, хотя ошибку в нем и можно сделать сколь угодно малой, все более и более уменьшая количества MZ, RZ. Ведь для того чтобы эта ошибка совершенно исчезла, надо было бы довести эти количества MZ и RZ до абсолютного нуля; но тогда уравнение привелось бы к $\frac{0}{0}=\frac{y}{a-x}$, т. е. уравнению, которое конечно, нельзя назвать в точности ложным, но которое ничего не выражает, потому что $\frac{0}{0}$ есть количество неопределенное. Таким образом волей-неволей становишься перед альтернативой или допустить ошибку, хотя бы и сколь угодно малую, или же притти к ничего не выражающей формуле. В этом именно и состоит гордиев узел анализа бесконечно-малых.

32. Другие ограничиваются тем, что рассматривают количества, называемые *бесконечно малыми*, как *несравнимые* (incomparables) в том смысле, в каком, например, песчинка по своей малости несравнима с земным шаром. Тогда говорят они, допущенные ошибки являются неощутимыми, и, следовательно, ими в результате вычисления можно вполне пренебречь.

Но с этой точки зрения анализ бесконечно-малых был бы только приближенным методом, между тем, как вполне известно, он абсолютно строг.

Это сравнение песчинки с земным шаром может быть, однако, полезным для облегчения выражения условия задачи, указывая, чем можно пренебречь. Но в окончательных уравнениях не должно существовать ошибки даже размером в песчинку. Она должна исчезнуть как раз благодаря тому, что была допущена не один лишь раз в продолжение вычисления, но несколько раз и в противоположных смыслах, отчего происходит необходимая компенсация, безусловно обнаруживающаяся в окончательных уравнениях благодаря исключению всех произвольных количеств.

33. Я полагаю, что достаточно выяснил точность принципов лейбницевского анализа бесконечно-малых; но для того чтобы сделать их применение более легким, я считаю нужным осветить их еще несколько по-другому. Я называю *несовершенным уравнением* (équation imparfaite) всякое уравнение, строгая точность которого не доказана, но относительно которого, однако, известно, что если в нем существует ошибка, то ее можно предположить сколь угодно малой. Иначе, чтобы сделать это уравнение совершенно точным, достаточно подставить вместо входящих в него количеств или только вместо некоторых из них другие количества, отличающиеся от них бесконечно мало.

Согласно этому определению ясно, что несовершенные уравнения можно подвергать различным преобразованиям, не лишая их характера несовершенных уравнений: как, например, переносить члены из одной части в другую, умножать или делить обе части на равные количества, возводить их в одинаковые степени или извлекать из них одинаковые корни.

Более того, вместо каких-либо входящих в них количеств можно подставлять другие, отличающиеся

от них бесконечно мало, пренебрегать бесконечно малыми количествами по сравнению с количествами конечными и вообще количествами второстепенными по сравнению с количествами главными; причем эти уравнения не теряют от этого своего первоначального характера, по крайней мере, несовершенных уравнений, которые могут, наконец, стать точными через компенсацию ошибок.

Важно отметить то обстоятельство, что накопление этих ошибок, вместо того чтобы все более и более отдалять от цели, состоящей в приведении этих несовершенных уравнений к абсолютной точности, как это первоначально кажется должно было бы произойти, напротив, способствует достижению этого самым коротким и самым простым путем, ибо, устраняя последовательно эти неудобные, посторонние добавления и направляя свое внимание единственно только на то, чтобы не лишить уравнения их основного характера, достигают, наконец, благодаря полному исключению всего, что было в них произвольного, их абсолютного освобождения от какого-либо элемента бесконечности. Тогда в них останутся только те количества, соотношения между которыми желали получить. После этого можно сказать, что вся теория бесконечности как бы заключается в следующей теореме.

Теорема

34. Для того чтобы быть уверенным, что какое-нибудь уравнение является необходимо и строго точным, достаточно убедиться: 1) что оно было выведено из уравнений истинных или, по крайней мере, несовершенных при посредстве таких преобразований, которые не лишили их характера по крайней мере несовершенных уравнений; 2) что оно больше не заключает ни одного неконечного (infini-

tésimale) количества, т. е. какого-нибудь количества, отличного от тех, соотношение между которыми предлагалось найти.

Доказательство. Так как, по предположению, преобразования, которым могли были быть подвергнуты исходные уравнения, не лишали их характера уравнений по крайней мере несовершенных, то эти уравнения могут содержать в себе только ошибки, способные стать сколь угодно малыми.

Но, с другой стороны, эти уравнения уже не могут быть более из числа тех, что мы называли *несовершенными*, потому что эти последние могут существовать только между количествами, которые содержат в себе нечто произвольное, так как по самому их определению ошибка в них может быть предположена сколь угодно малой. Но по предложению все произвольные количества являются исключенными, так как остаются только те, соотношения между которыми предлагалось найти.

Следовательно, новые уравнения не могут быть ни абсолютно ложными, т. е. содержащими в себе те ошибки, которых нельзя было бы сделать сколь угодно малыми, ни теми, которые я назвал *несовершенными*. Следовательно, они необходимо и строго точны. *Что и требовалось доказать.*

Королларий I

35. Будут ли уравнения, о которых идет речь, выражены при посредстве алгебраических символов или же они будут заменены предложениями, выраженными на обыкновенном языке, предшествующее доказательство все равно сохраняет свою силу. Следовательно, если для достижения решения какого-нибудь вопроса строят свои рассуждения на таких предложениях, что ошибки, которые могли бы из них воспоследовать,

являются сколь угодно малыми и если, в конце концов, переходя от следствий к следствиям, достигают предложений, освобожденных от какого-либо элемента бесконечности и, следовательно, от всякого произвольного количества, то эти последние предложения будут необходимо и строго точны.

Короллларий II

36. Из теоремы и из предыдущего короллария следует, что анализ бесконечно-малых сводится к трем пунктам, которые, если их строго соблюдать, приводят при помощи самых простых из всех известных способов всегда к совершенно точным результатам. Именно, для этого следует:

1. Выражать условия предложенного вопроса либо через точные уравнения, либо, по крайней мере, через несовершенные уравнения или при посредстве предложений, им равносильных.

2. Преобразовывать эти уравнения или предложения различными способами, не лишая их никогда их первоначального характера уравнений по крайней мере несовершенных.

3. Направлять эти преобразования к тому, чтобы совершенно освободить уравнения от количеств неконечных (infinitésimales) и каких-нибудь их функций, так чтобы всецело исключить их из результатов вычисления.

37. Заканчивая изложение учения о компенсации ошибок, я считаю себя вправе гордиться мнением, которое высказал по поводу его великий человек, недавнюю потерю которого оплакивает весь ученый мир, а именно *Лагранж.* Вот что говорит он по этому вопросу в последнем издании своей «Теории аналитических функций» («Théorie des fonctions analytiques»).

«Мне кажется, что когда, пользуясь общеупотребительным диференциальным исчислением, рассматривают и действительно пользуются при вычислениях бесконечно-малыми или же предполагаемыми бесконечно малыми количествами, то истинная метафизика этого исчисления состоит в том, что ошибка, вытекающая из этого ложного предположения, исправляется и компенсируется той, которая рождается из самых приемов вычисления, следуя которым при диференцировании сохраняют только бесконечно малые количества того же самого порядка. Например, когда рассматривают кривую как многоугольник с бесконечно большим числом сторон, из которых каждая бесконечно мала и имеет своим продолжением касательную к кривой, то, очевидно, при этом делают ошибочное предположение; но ошибка исправляется в вычислении благодаря производимому в нем опущению бесконечно малых количеств. Это можно легко обнаружить на отдельных примерах, но этому, может быть, трудно дать общее доказательство».

В этих словах вся моя теория изложена с большей ясностью и точностью, чем я мог бы сам это сделать. Независимо от того, трудно или нет дать этому общее доказательство, истинная метафизика анализа бесконечно-малых в том виде, в каком его употребляют и в каком все математики признают необходимым его употреблять благодаря легкости вычислений, состоит, согласно мнению знаменитого ученого, которого я только что процитировал, в принципе компенсации ошибок. И я думаю, что я ничего не упустил ни в точности, ни в общности того доказательства, которое я дал.

38. Все вышеизложенное заключает только общие принципы анализа бесконечно-малых. Прежде чем показать, как эти общие принципы были приведены Лейбницем к алгорифму, который и сообщил им ха-

рактер правильного исчисления, мы их применим к некоторым частным примерам. То, о чем мы говорили, относится еще к синтезу и обыкновенному анализу, но этот новый синтез является уже сам по себе чрезвычайно важным и ценным, и если бы древние обладали им вместо метода исчерпывания, который он замещает (supplée), то они в высшей степени упростили бы свои работы и, вероятно, продвинули бы свои открытия гораздо дальше, чем они это сделали: ибо они употребляли свои усилия на преодоление тех трудностей, которые немедленно устраняются одним понятием бесконечности.

Что касается употребления, которое может сделать из этого понятия обыкновенный алгебраический анализ, отвлекшись от свойственного ему алгорифма, то, если кто желает знать пользу, которую можно при этом извлечь, пусть прочитает «Введение в анализ бесконечно-малых» Эйлера, и он будет поражен мощью подобного орудия в умелых руках.

Задача I

39. Провести касательную к обыкновенной циклоиде. Пусть (фиг. 2) *AEB* будет обыкновенной циклоидой, производящим кругом которой является *EpqF*. Основное свойство этой циклоиды состоит в том, что для какой-нибудь точки *m* часть *mp* ординаты, заключенная между кривой и производящей окружностью, равна дуге *Ep* этой окружности.

Проведем в точке *p* этой окружности касательную *pT* и постараемся найти точку *T*, в которой эта касательная пересечется с касательной циклоиды *mT*. Для этого я провожу новую ординату *nq*, бесконечно близкую к первой *mp*, и через точку *m* — линию *mr*, параллельную малой дуге *pq*, которую я так же, как и *mr*, рассматриваю как прямую линию.

Очевидно, что два треугольника mnr и Tmp подобны, и, следовательно, мы будем иметь:

$$mr : nr :: Tp : mp.$$

Но так как из свойств циклоиды следует, что $Eq = nq$ и $Ep = mp$, то, вычитая второе из этих равенств из первого, мы получим:

$$Eq - Ep = nq - mp,$$

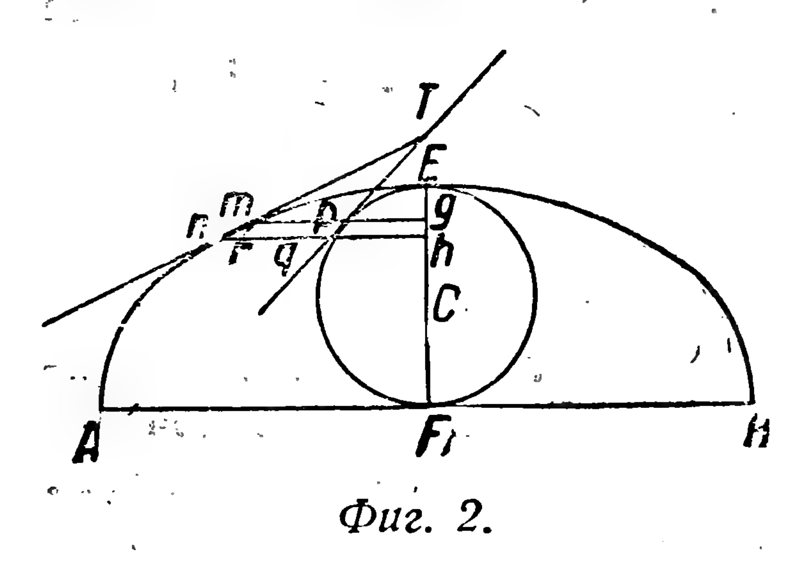
откуда

$$pq = nr,$$

или

$$mr = nr.$$

Следовательно, из найденной выше пропорции мы получим $Tp = mp$ или $Tp = Ep$, т. е. что подкасательная Tp всегда равна соответствующей дуге Ep. Так как это предложение свободно от какого-либо элемента бесконечности, то оно необходимо и строго точно.



Фиг. 2.

Задача II

40. Доказать, что две пирамиды с одинаковыми основаниями и одинаковой высотой равны по объему.

Представим себе, что эти две пирамиды разделены на одинаковое число бесконечно тонких слоев, параллельных их основаниям и соответственно равных между собой по толщине. Сравним два соответствующих слоя, взятых один в первой, другой во второй из этих

пирамид. Я прежде всего утверждаю, что эти два слоя могут только бесконечно мало отличаться друг от друга.

В самом деле, каждый из этих слоев есть усеченная пирамида, и если представить себе, что из всех углов меньшего из ее двух оснований проведены параллельные прямые, которые встречают большее, то очевидно, что усеченная пирамида окажется разбитой на две части. Одна из них, призматическая, заключена между этими параллелями и имеет своей толщиной расстояние между двумя основаниями усеченной пирамиды, а основанием — меньшее из двух ее оснований; другая имеет форму вырезка (onglet), который имеет своей толщиной расстояние между двумя основаниями усеченной пирамиды, а основанием — разность между большим и меньшим основаниями той же самой усеченной пирамиды. Но эти два последних основания могут приближаться друг к другу сколь угодно близко, и их разность, очевидно, может быть сделана сколь угодно малой относительно каждого из них. Следовательно, вырезок сам по себе является бесконечно малым относительно того слоя, к которому он принадлежит.

Установив это, назовем T и T' объемы двух соответствующих слоев в двух пирамидах, p и p' — призматические их части, q и q' — вырезки; тогда будем иметь два точных уравнения:

$$T = p + q, \quad T' = p' + q',$$

или

$$p = T - q, \quad p' = T' - q';$$

но p и p' суть призмы одинаковых оснований и одной и той же высоты; следовательно, имеем $p = p'$; приравнивая их значения, будем иметь $T - q = T' - q'$; пренебрегая q, q', которые, как мы только что ви-

дели, бесконечно малы относительно T и T', мы будем иметь $T = T'$.

Так как это уравнение не свободно от бесконечного, то нам еще не известно, является ли оно точным или несовершенным, но так как сказанное о двух слоях можно применить ко всем слоям, составляющим целые пирамиды, то отсюда следует, что, называя P и P' целые объемы двух пирамид, мы будем иметь $P = P'$.

Но эти два объема целых пирамид являются количествами вполне установленными; следовательно, уравнение $P = P'$ вполне свободно от какого-либо элемента бесконечности, и, следовательно, оно является необходимым и строго точным.

41. Другое доказательство. Очевидно, что каждый из слоев, о которых мы говорили, можно рассматривать как заключенный между двумя призмами той же самой высоты, как и он сам, из которых одна будет иметь своим основанием большее из двух оснований слоя, а другая — меньшее. Слой, таким образом, является меньшим, чем большая из этих двух призм, и большим, чем другая. Следовательно, сумма слоев, составляющих каждую целую пирамиду, меньше, чем сумма призм, описанных около этих слоев, и больше, чем сумма призм вписанных.

Но ясно, что разность между призмами вписанной и описанной вокруг одного и того же слоя равна произведению разности двух оснований на высоту слоя. Следовательно, сумма призм, описанных около слоев одной пирамиды, минус сумма призм, вписанных в те же самые слои, равна произведению высоты какого-нибудь из слоев на сумму разностей между большими и малыми основаниями. Но если спроектировать эти разности на само основание пирамиды, то легко увидеть, что проекции в точности покроют это основание. Следовательно, сумма описанных призм минус сумма вписанных призм равна основанию пирамиды,

умноженному на высоту какого-нибудь из слоев. Но эта высота является сколь угодно малой; следовательно, сумма описанных призм лишь бесконечно мало отличается от суммы призм, вписанных в ту же пирамиду.

Далее, если сравнить призмы, вписанные и описанные около каждой пирамиды, с соответствующими призмами другой, то можно увидеть, что они имеют соответственно одинаковые основания и одинаковую высоту. Следовательно, они соответственно равны друг другу. Следовательно, сумма их для одной пирамиды равна сумме их для другой.

Но каждая пирамида сама меньше суммы описанных призм и больше суммы вписанных призм.

Следовательно, так как все эти суммы или равны или бесконечно мало отличаются одна от другой, то сами пирамиды бесконечно мало отличаются одна от другой. Следовательно, отвлекаясь от количеств бесконечно малых по сравнению с целыми пирамидами, можно сказать, что эти пирамиды равны между собой. И так как это последнее предложение совершенно свободно от какого-либо элемента бесконечности, то оно необходимо и строго точно, т. е. две пирамиды с одинаковыми основаниями и одинаковой высотой равны между собой.

Задача III

42. Доказать, что поверхность шарового пояса равна поверхности соответствующей части описанного около шара цилиндра.

Пусть AGB (фиг. 3) будет полуокружность, образующая предложенную сферическую поверхность, C — ее центр, AB — диаметр, $ADEB$ — прямоугольник, образующий описанный цилиндр, mr — бесконечно малая часть образующей полуокружности, smp и trq — перпендикуляры к диаметру AB, продолженные до

параллель к нему DE, mn — перпендикуляр, проведенный из точки m к trq, Cm — радиус, проведенный к точке m. Я сначала докажу, что поверхность пояса, образуемого малой дугой mr, равна поверхности цилиндрического кольца, образуемого pq.

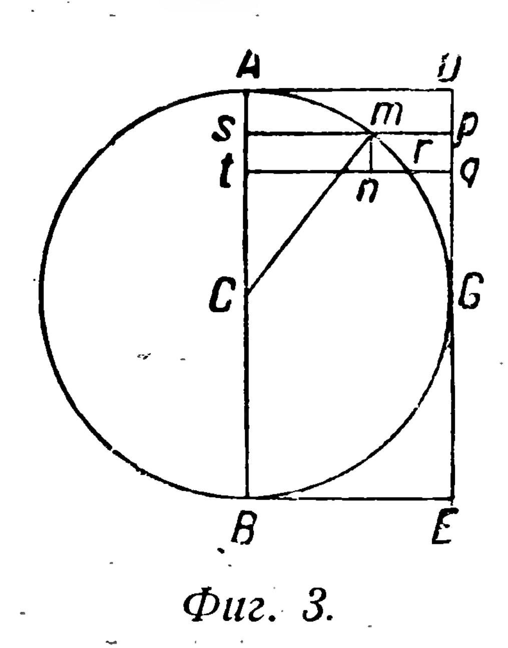
Для этого я рассматриваю круг как многоугольник с бесконечным числом сторон, а дугу mr как одну из этих сторон. Тогда подобные треугольники mnr, msC дают $mn : mr :: ms : mC$; или же, так как $mn = pq$ и окружности, которые имеют радиусами ms, mC, относятся, как эти радиусы, то

$$pq : mr :: \text{окр. } ms : \text{окр. } mC$$

или

$$\text{окр. } ms \times mr = \text{окр. } mC \times pq.$$

Но очевидно, что первая часть этого уравнения бесконечно мало отличается от боковой поверхности малого усеченного конуса, образуемого трапецией $mstr$, или малого пояса, образуемого дугой mr, принятой за прямую линию, и что вторая часть есть поверхность соответствующего ему цилиндрического кольца. Следовательно, поверхность малого пояса равна поверхности малого кольца.



Фиг. 3.

Так как это равенство еще не освобождено от бесконечности, то нам еще неизвестно, точно оно или только несовершенно; но так как мы можем применить ко всем бесконечно малым поясам то, что было сказано о первом, то мы отсюда заключаем, что, вообще, какой-нибудь пояс определенной величины равен соответствующей ему части цилиндрической поверхности.

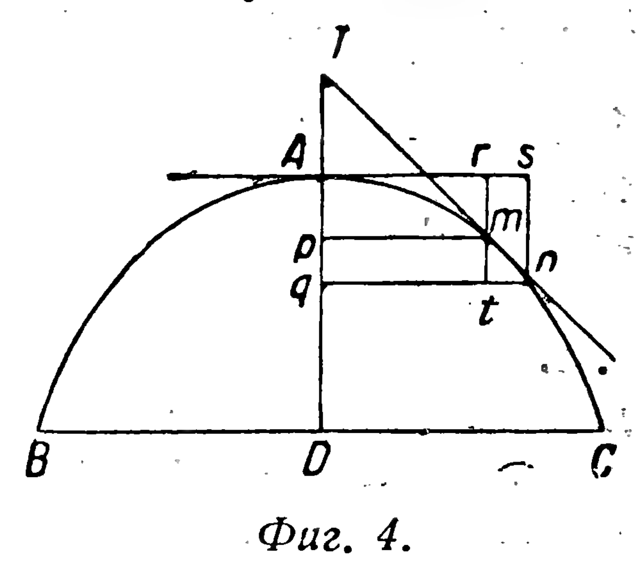
Это предложение, будучи совершенно свободным от какого-либо элемента бесконечности, является необходимо и строго точным.

Задача IV

43. Доказать, что объем параболоида есть половина цилиндра с теми же основанием и высотой.

Пусть (фиг. 4) $AmnC$ — образующая парабола, $TApD$ — ее ось, Ap — абсцисса, соответствующая точке m, pm — ордината, Tp — подкасательная, qn — другая ордината, бесконечно близкая к первой, Ars — касательная в вершине, mr и ns — два перпендикуляра, опущенные из точек m и n на эту касательную, mt — продолжение mr до встречи с qn.

Я рассматриваю кривую как многоугольник с бесконечным числом сторон и mn как одну из этих сторон. Если вообразить, что фигура вращается около оси TAp, то малая трапеция $pmnq$ образует один из элементов параболоида, а малая трапеция $rsmn$ — соответствующий элемент объема, дополняющего параболоид до цилиндра, образуемого четырехугольником $Asnq$. Я утверждаю, что эти два элемента равны между собой.



Фиг. 4.

В самом деле, очевидно, что первый, т. е. элемент параболоида, если пренебречь количествами бесконечно малыми относительно остающихся, равен:

$$qp \cdot pm \cdot \frac{1}{2} \text{ окр. } pm,$$

а второй равен:

$$rs \cdot mr \cdot \text{окр. } Ar.$$

Но мы имеем $rs = tn$, $Ar = pm$, и так как в параболе подкасательная равна удвоенной абсциссе, то имеем также $mr = \frac{1}{2}pT$. Следовательно, второй вышеуказанный элемент станет $nt \cdot \frac{1}{2}pT \cdot$ окр. pm. Подобные же треугольники mnt, Tmp дают:

$$tn : mt :: pm : Tp$$

и, значит, $tn \cdot Tp = mt \cdot pm$. Следовательно, если подставить значение $tn \cdot Tp$ в предыдущее выражение, то оно преобразуется в $mt \cdot pm \cdot \frac{1}{2}$ окр. pm, которое является тем самым, что и выражение, которое найдено было выше для первого элемента. Следовательно, эти два элемента равны или отличаются бесконечно мало.

Но так как это равенство еще не освобождено от бесконечности, то я воображаю весь параболоид составленным из подобных элементов, и, применяя к каждому элементу то же рассуждение, что и выше, я заключаю, что сумма всех элементов параболоида, т. е. самый объем этого тела, равна сумме элементов дополнительного объема и, следовательно, только половине цилиндра. Это предложение, будучи свободно от какого-либо элемента бесконечности, является необходимо и совершенно строгим.

Задача V

44. Доказать, что в равномерно ускоренном движении проходимые пространства относятся, как квадраты времен, считая от того момента, когда скорость была равна нулю.

Равномерно ускоренное движение—это то, при котором скорости, приобретенные начиная с момента, когда скорость была равна нулю, пропорциональны

протекшим от этого же момента временам. Следовательно, если назвать v — эту скорость, t — время и E — пройденное пространство и для другого момента — v' — скорость, t' — истекшее время и E' — пространство, то мы согласно предположению будем иметь: $v : v' :: t : t'$. Требуется доказать, что

$$E : E' :: t^2 : t'^2.$$

Представим себе, что скорость возрастает на бесконечно малые равные между собой величины, и пусть p есть получаемое ею каждый раз бесконечно малое приращение. Тогда эта скорость будет последовательно принимать значения 0, p, $2p$, $3p$, $4p$ и т. д., т. е. значения членов возрастающей арифметической прогрессии, первый член которой 0, а разность p.

Назовем q бесконечно малый промежуток времени, который протекает от одного приращения скорости до другого. Эти приращения равны, и так как время пропорционально скорости, то промежуток q будет постоянно один и тот же; рассматривая в продолжение этого промежутка скорость как постоянную, мы получим, что проходимые последовательно пространства будут 0, pq, $2pq$, $3pq$ и т. д., т. е. также будут членами арифметической прогрессии. Следовательно, все пройденное пространство, т. е. сумма пространств, проходимых в каждый момент, будет суммой всех членов этой прогрессии.

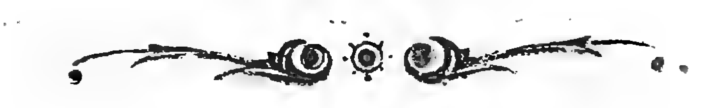
Сумма же всех членов арифметической прогрессии, первый член которой есть 0, равна произведению последнего члена на половину числа членов. Но все время, очевидно, равно элементу времени q, умноженному на число членов без одного; и, следовательно, если назвать через n это число членов, то мы будем иметь:

$$t = q(n - 1), \quad \text{или} \quad n = \frac{t + q}{q}.$$

Пренебрегая в числителе q как бесконечно малым по сравнению с t, мы получим $n = \frac{t}{q}$. Поэтому конечная скорость есть $p(n-1)$, или $p \cdot \frac{t}{q}$. Следовательно, сумма членов или же пройденное пространство есть $\frac{1}{2} p \cdot \frac{t \cdot t}{q \cdot q}$, т. е. $E = \frac{pt^2}{2q^2}$. На том же самом основании мы будем иметь: $E' = \frac{pt'^2}{2q^2}$, откуда $E : E' :: t^2 : t'^2$.

Эта пропорция, будучи свободна от какого-либо элемента бесконечности, является необходимой и строго точной.

45. Этих примеров достаточно, чтобы показать, как можно пользоваться в рассуждениях обыкновенной алгебры принципами анализа бесконечно-малых. Мы теперь постараемся рассмотреть, как эти принципы были приведены к алгорифму в диференциальном и интегральном исчислениях.





ГЛАВА ВТОРАЯ

ОБ АЛГОРИФМЕ, ПРИЛАГАЕМОМ К АНАЛИЗУ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

46. После того как основные принципы нового учения были установлены, в многочисленных приложениях этого учения было замечено, что среди бесконечно малых количеств, которыми оно оперирует, имеется особенный класс количеств, которые встречаются гораздо чаще, чем все другие: это так называемые *диференциалы.*

Под словом *диференциал* понимают разность двух последовательных значений одного и того же переменного, возникающую, когда систему, к которой оно принадлежит, рассматривают в двух или нескольких последовательных состояниях, из которых одно является твердо установленным, а другие непрерывно и одновременно приближают к первому до тех пор, пока они не будут отличаться от него сколь угодно мало.

47. Уменьшительное название «диференциал» (différentielle) показывает одновременно и то, что количество, которое оно обозначает, есть разность (différence) и что эта разность есть количество бесконечно малое. Оно выражает собой бесконечно малое количество, на которое увеличилась переменная, переходя от своего первого состояния ко второму.

Диференциал какого-либо количества обыкновенно обозначается в исчислении буквой d, поставленной перед той, которая обозначает переменное: таким образом dx обозначает диференциал от x, dy — от y, $d\frac{x}{y}$ — диференциал дроби $\frac{x}{y}$, т. е. бесконечно малое количество, на которое увеличивается эта дробь, когда x увеличивается на dx и y на dy. Таким образом буква d не обозначает собой количества и употребляется как простой индекс: это лишь сокращение слов *диференциал от*; в исчислении она носит имя *характеристики*.

Постоянные количества не имеют диференциала, или же, если угодно, их диференциал есть нуль, потому что они по своей природе не увеличиваются, или же их увеличение можно считать равным нулю, когда система рассматривается переходящей от первого состояния ко второму.

48. Когда в результате вычислений диференциал какого-нибудь количества получает отрицательное значение, то это служит доказательством того, что мы сделали ошибочное предположение и что переменное, о котором идет речь, вместо того чтобы, как это предполагали, возрастать, наоборот, при общем изменении состояния системы убывает. Так, например, если обозначить дугу окружности, меньшую четверти, через s, то диференциал ее будет ds, диференциал ее синуса будет $d \sin s$, а диференциал ее косинуса $d \cos s$. И если предположить, что s возрастает,

то очевидно, что синус тоже будет возрастать, но что косинус, напротив, будет убывать.

Поэтому алгебраические выкладки дадут для $d\cos s$ отрицательную величину. Это действительно так, как будет видно в дальнейшем.

Но как бы переменное ни изменялось, возрастая или же убывая, под его диференциалом всегда подразумевают разность между его вторым значением и первым, и эту разность постоянно обозначают характеристикой d, сопровождаемой названным переменным и принимаемой за положительную, предоставляя обыкновенно самому вычислению исправить те ошибочные предположения, которые могли быть допущены.

Когда несколько переменных количеств связаны каким-нибудь законом, как, например, абсцисса и ордината кривой, то приращение одной необходимым образом определит приращение другой. Так, например, если обозначить абсциссу через x, а ординату через y, то между dx и dy будет существовать отношение, определяемое зависимостью между самыми x и y. И, наоборот, зависимость между x и y зависит от отношения, в котором они находятся вместе со своими диференциалами dx и dy. Из этого факта возникают две ветви анализа бесконечно-малых. Одна из них имеет своим предметом определение соотношения между диференциалами нескольких переменных и самими этими переменными, когда известно соотношение между этими последними; другая же — определение соотношения, существующего только между переменными, когда известно соотношение, связывающее эти переменные с их диференциалами.

49. Легко представить себе, какую помощь могут оказать раз установленные правила обоих исчислений при решении различных возможных вопросов. Дей-

ствительно, всякий вопрос сводится к определению отношения, существующего между некоторыми означенными (désignées) количествами, и если я не могу непосредственно установить это соотношение, то естественно, что я стараюсь достичь этого при посредстве некоторых вспомогательных количеств. Но опыт учит, что никакие из вспомогательных количеств не приносят больших упрощений, чем те, которые называются *неконечными* (infinitésimales), и поэтому естественно вводить их, по мере возможности, в математические рассуждения. Тогда они либо исключаются сами собой подобно обыкновенным алгебраическим количествам — в этом случае все приемы, употребляемые при вычислениях, принадлежат к так называемому *диференциальному исчислению*; либо же приходится прибегать к некоторым преобразованиям, не принятым в обыкновенной алгебре, но всегдашней целью которых является исключение этих называемых неконечными вспомогательных количеств, — эти преобразования находятся в ведении так называемого *интегрального исчисления.*

Первое из этих исчислений является гораздо более легким, чем второе, потому что оно, собственно говоря, не заключает в себе никаких приемов, которые не были бы у него общими с анализом древних; но интегральное исчисление требует весьма отличных приемов, которые еще далеки от совершенства, несмотря на посвященные ему труды перворазрядных ученых. Моя цель здесь состоит только в том, чтобы ознакомить с духом этих методов и показать общее направление этих исчислений. Я начну с диференциального исчисления, как с более простого и, кроме того, необходимого для понимания интегрального исчисления. Но я как в случае диференциального, так и в случае интегрального исчисления ограничусь основными понятиями.

50. Мы уже говорили, что диференциал переменного количества есть бесконечно малая разность между вторым состоянием этого переменного и первым. Дело идет, следовательно, о том, чтобы определить этот диференциал для всех возможных случаев, т. е. для всех возможных функций данных переменных, как, например, x, y, z и т. д., соответственные диференциалы которых уже выражены через dx, dy, dz и т. д.

Прежде всего надо рассмотреть какое различие мы устанавливаем между действием, посредством которого находят обыкновенную или конечную разность, и действием, при котором получают только диференциал или бесконечно малую разность. Если мы рассмотрим данную нам систему в двух каких-либо определенных, отличных друг от друга состояниях, то разность двух значений одного и того же количества в двух системах равным образом будет определенной, и, следовательно, ее нельзя предполагать сколь угодно малой. Поэтому здесь ничем нельзя было бы пренебречь, не допуская ошибок, которые больше нельзя было бы исправить. Но если предположить, что две системы сколь угодно приближаются одна к другой, то разность двух значений одного и того же переменного может быть сделана сколь угодно малой; она станет тем, что называют диференциалом и будет представлять собой не что иное, как обыкновенную разность, упрощенную благодаря уничтожению количеств, которые в ее выражении являются бесконечно малыми относительно других составляющих ее членов. Таков основной принцип диференцирования.

51. Из этого основного принципа, очевидно, следует, что для диференцирования какого-либо количества или какой-нибудь функции этого количества

или же нескольких количеств, которую я обозначу $\varphi(x, y, z$ и т. д.), нужно только рассмотреть ее во втором состоянии, т. е. когда x, y, z и т. д. перейдут соответственно в $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ и т. д., а сама эта функция перейдет в $\varphi(x+dx, y+dy, z+dz$ и т. д.), и затем из приросшей, таким образом, функции вычесть ее начальное значение, т. е. $\varphi(x, y, z$ и т. д.), что даст для разности данной функции:

$$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz \text{ и т. д.}) - \varphi(x, y, z \text{ и т. д.}).$$

Для перехода от этой разности к диференциалу надо будет лишь преобразовать выражение, пренебрегая в нем количествами, бесконечно малыми по сравнению с теми, к которым они прибавляются или от которых отнимаются. Далее, нам остается только применить эту общую формулу к каждому отдельному случаю.

Пусть требуется продиференцировать $a+b+x+$ $+y+z$, сумму нескольких количеств, из которых одни a, b суть постоянные, а другие x, y, z — переменные, т. е. пусть требуется найти

$$d(a+b+x+y+z).$$

Согласно вышеприведенной основной формуле постоянные a, b не имеют никакого диференциала, а переменные x, y, z имеют диференциалами dx, dy, dz. Поэтому мы имеем:

$$d(a+b+x+y+z) = a+b+(x+dx)+$$
$$+(y+dy)+(z+dz)-(a+b+x+y+z),$$

равенство, которое приводится к

$$d(a+b+x+y+z) = dx+dy+dz,$$

т. е. *диференциал какой-либо суммы постоянных и переменных равен сумме диференциалов одних переменных.*

52. Пусть требуется продиференцировать $x - y$. Согласно основной формуле мы имеем:

$$d(x-y) = (x+dx) - (y+dy) - (x-y),$$

или, делая приведения:

$$d(x-y) = dx - dy,$$

т. е. *диференциал разности каких-нибудь двух переменных равен разности их диференциалов.*

Пусть требуется продиференцировать

$$ax + by - cz.$$

Согласно основной формуле мы будем иметь:

$$d(ax + by - cz) = adx + bdy - cdz.$$

53. Пусть требуется продиференцировать произведение $x \cdot y$. Сначала мы по основной формуле получим разность:

$$(x+dx)(y+dy) - xy,$$

или, делая приведения:

$$x\,dy + y\,dx + dx \cdot dy.$$

Но так как дело идет не о какой-нибудь конечной разности, а о диференциале, то следует заметить что последний член $dx \cdot dy$ является бесконечно малым относительно каждого из двух других: действительно, при делении его на первый получается $\frac{dx}{x}$, а при делении на второй $\frac{dy}{y}$, которые оба, очевидно, представляют собой количества бесконечно малые. Следовательно, этим третьим членом по сравнению с другими должно пренебречь, и формула приводится к виду:

$$d\,xy = x\,dy + y\,dx.$$

Подобным же образом найдем:

$$dxyz = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$$

и аналогично для большего числа сомножителей. Отсюда следует такое правило: *чтобы продиференцировать произведение нескольких переменных множителей, надо взять сумму диференциалов каждого переменного, умноженных каждый на произведение всех других переменных.*

54. Пусть требуется продиференцировать дробь $\frac{x}{y}$. Согласно основной формуле разность будет: $\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$, или же, приводя к одному знаменателю:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2 + y\,dy};$$

но так как мы ищем не абсолютную разность, а только диференциал, то в знаменателе этого выражения следует уничтожить количество $y\,dy$, потому что оно является бесконечно малым относительно другого члена y^2. Следовательно, мы получаем:

$$d\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

т. е. вообще *диференциал дроби равен знаменателю этой дроби, умноженному на диференциал числителя минус числитель, умноженный на диференциал знаменателя, все это деленное на квадрат знаменателя.*

55. Пусть требуется продиференцировать x^m.

Если последовательно принимать $m=2$, $m=3$, $m=4$ и т. д., то x^m можно будет рассматривать как произведение x, помноженного на самого себя один

раз, два раза, три раза и т. д. Поэтому к x^m можно будет применить уже установленное правило (53), из которого получится, что

$$dx^m = mx^{m-1}\,dx.$$

Если последовательно положить $m = -1$, $m = -2$, $m = -3$ и т. д., или, что сводится к тому же самому, если желают продиференцировать количества $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ и т. д., то к ним достаточно будет применить найденное выше правило диференцирования дробей; при этом мы, равным образом, получим формулу:

$$dx^m = mx^{m-1}\,dx.$$

Если предположить, что показатель m будет дробью $\frac{p}{q}$, то кладут $x^{\frac{p}{q}} = z$; возвышая каждую часть равенства в степень q, мы будем иметь $x^p = z^q$; диференцируя каждую часть по вышеуказанному правилу, получим:

$$px^{p-1}\,dx = qz^{q-1}\,dz,$$

откуда

$$dz = \frac{px^{p-1}\,dx}{qz^{q-1}}.$$

Подставляя во вторую часть вместо z его значение $x^{\frac{p}{q}}$, мы будем иметь:

$$dz = \frac{px^{p-1}\,dx}{qx^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx,$$

т. е. снова ту же формулу, что и выше. Значит, вообще, *диференциал любой положительной или отрицательной, целой или дробной степени равен произве-*

дению показателя степени на переменное в степени, меньшей на единицу, чем данная степень, все это умноженное на диференциал переменного.

56. Если бы заданные количества стояли под радикалами, то их надо было бы преобразовать в количества с показателями. Таким образом предшествующих правил достаточно для диференцирования алгебраических количеств. Но количества с переменными показателями не входят в сферу действия этих правил; между тем их тоже можно диференцировать точно так же, как и другие количества, называемые трансцендентными, как, например, количества логарифмические и тригонометрические (angulaires). Мы теперь рассмотрим соответствующие правила.

57. Пусть требуется продиференцировать a^x, где a — количество постоянное, а x — переменный показатель.

Согласно основному принципу искомый диференциал будет:

$$a^{x+dx} - a^x \text{ или } a^x a^{dx} - a^x \text{ или } a^x(a^{dx} - 1),$$

т. е. мы будем иметь:

$$da^x = a^x(a^{dx} - 1). \qquad \text{(A)}$$

Но для того чтобы это равенство было пригодным, нужно избавиться от бесконечно малого количества dx в показателе.

Для этого я кладу $a = 1 + b$ и, следовательно, буду иметь:

$$a^{dx} = (1 + b)^{dx},$$

или, разлагая по формуле бинома Ньютона:

$$a^{dx} = 1 + dxb + \frac{dx\, b^2(dx - 1)}{2} + \\ + \frac{dx\, b^3(dx - 1)(dx - 2)}{2 \cdot 3} + \text{ и т. д.},$$

и так как бесконечно малое количество dx исчезает (disparaît) по сравнению с конечными числами 1, 2, 3 и т. д., то равенство после переноса первого члена правой части приводится к виду:

$$a^{dx}-1=dx\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{и т. д.}\right).$$

Подставляя это значение $a^{dx}-1$ в формулу (A) и заменяя b его значением $a-1$, мы будем иметь

$$da^x=a^x\,dx\Big[(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+$$
$$+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{и т. д}\Big]. \qquad \text{(B)}$$

58. Рассмотренное только что диференцирование показательных количеств дает средства диференцировать также количества логарифмические. В самом деле, согласно общему определению логарифмов, при любом основании a системы, $x=\lg a^x$, и, следовательно, $dx=d\lg a^x$. Подставляя это значение dx в уравнение (B), мы получим:

$$da^x=a^x d\lg a^x\Big[(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+$$
$$+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{и т. д.}\Big];$$

откуда, положив $a^x=y$, найдем:

$$d\lg y=\frac{dy}{y}\cdot\frac{1}{\left[(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{и т. д.}\right]}$$

Предположив для упрощения, что последний постоянный множитель обозначен через m, мы для любой системы логарифмов получим:

$$d\lg y=\frac{m\,dy}{y}. \qquad \text{(C)}$$

Число m, представляющее собой, как видно, известную функцию основания системы логарифмов a, есть так называемый *модуль* этой системы.

Простейший случай будет, когда предполагают, что $m = 1$, что приводит формулу (C) к виду:

$$d \lg y = \frac{dy}{y}.$$

Поэтому логарифмы этой системы называются *натуральными логарифмами* или *неперовыми логарифмами* по имени их знаменитого изобретателя, барона Непера, или же еще *гиперболическими логарифмами* вследствие их связи с квадратурой частей площади, заключенной между равносторонней гиперболой и ее асимптотами.

59. Так как мы положили

$$m = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{и т. д.}},$$

то для натуральных логарифмов, т. е. для случая, когда $m = 1$, мы будем иметь:

$$(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{и т. д.} = 1,$$

что приближенно дает $a = 2{,}718281828459045\ldots$ Таким образом основание натуральных логарифмов или число, логарифм которого в этой системе равен единице, очень близко к указанному числу, которое условились, как правило, обозначать в алгебраических вычислениях буквой e. Таким образом в этой системе $x = \lg e^x$, $e = 2{,}718281828459045\ldots$

Наши обыкновенные таблицы логарифмов, составленные преимущественно для арифметических целей,

вычислены при другом основании. Так как наша нумерация десятичная, то a кладут равным 10, т. е. предполагают $x = \lg 10^x$, и, значит, последовательно

$$10^x = 1,\ 10^x = 2,\ 10^x = 3 \text{ и т. д.}$$

Значения x, удовлетворяющие этим уравнениям, и суть логарифмы натуральных чисел 1, 2, 3, 4 и т. д.

Подставляя принятое значение основания, т. е. 10, в найденное выше уравнение

$$m = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{и т. д.}},$$

мы приближенно получим $m = 0{,}43429448...$ Это число и есть модуль обыкновенных таблиц логарифмов.

60. Между всеми возможными системами логарифмов существует глубокая связь, заключающаяся в том, что если эти логарифмы вычислены для какой-нибудь одной системы, то достаточно все их умножить на одно и то же число, чтобы перейти к другой.

В самом деле, пусть K есть какое-нибудь число, $\lg K$ — логарифм этого числа в системе, основание которой будет a, а $\lg' K$ — логарифм того же числа в другой системе, основание которой будет a'. Следовательно, мы будем иметь:

$$K = a^{\lg K},\ K = a'^{\lg' K}$$

и, значит,

$$a^{\lg K} = a'^{\lg' K}.$$

Взяв логарифмы в системе, основание которой a, мы получим:

$$\lg a^{\lg K} = \lg a'^{\lg' K},$$

или

$$\lg K \cdot \lg a = \lg' K \cdot \lg a'.$$

Следовательно,

$$\lg K : \lg' K :: \lg a' : \lg a$$

Но в силу тех же оснований мы получим и для всякого другого числа K':

$$\lg K' : \lg' K' :: \lg a' : \lg a.$$

Следовательно,

$$\lg K : \lg' K :: \lg K' : \lg' K',$$

или, наконец,

$$\lg K : \lg K' :: \lg' K : \lg' K'.$$

Следовательно, логарифмы двух чисел в одной системе относятся между собой так же, как логарифмы тех же чисел в другой.

61. Легко найти то постоянное количество, на которое надо помножить все логарифмы одной системы, чтобы получить логарифмы другой.

Действительно, найденная выше пропорция

$$\lg K : \lg' K :: \lg a' : \lg a$$

дает:

$$\lg' K = \frac{\lg a}{\lg a'} \cdot \lg K,$$

или, так как $\lg a = 1$, еще проще:

$$\lg' K = \frac{1}{\lg a'} \cdot \lg K.$$

Значит, то постоянное количество, на которое надо помножить логарифмы одной системы, чтобы получить логарифмы другой, равно единице, деленной на логарифм основания этой другой системы, взятый в первой.

62. Если продиференцировать предыдущее равенство согласно основному, установленному в (58) принципу, то оно даст:

$$\frac{mdK}{K}=\frac{1}{\lg a}\cdot\frac{dK}{K},$$

или

$$\lg a'=\frac{1}{m}.$$

Таким образом, вместо того чтобы для получения логарифмов какой-нибудь другой системы делить неперовы логарифмы на $\lg a'$, их достаточно помножить на m, т. е. на модуль этой системы.

Но выше (59) мы для модуля обыкновенных таблиц нашли $m=0{,}43429448$. Следовательно, для того чтобы получить обыкновенные логарифмы, надо помножить натуральные или неперовы логарифмы на это самое число.

Точно так же, наоборот, если вычислены обыкновенные таблицы, то, чтобы найти натуральные логарифмы, следует разделить каждый из логарифмов этих таблиц на 0,43429448, или, что то же самое, все их помножить на 2,30258509, которое равно $\frac{1}{0{,}43429448}$; и так как, согласно найденному выше равенству, $\lg a'=\frac{1}{m}$, то это последнее число и должно быть логарифмом 10 в неперовых таблицах.

63. Мы только что видели, что если a' представляет собой основание какой-либо системы логарифмов и m ее модуль, то $\lg a'=\frac{1}{m}$ или $m=\frac{1}{\lg a'}$, причем $\lg a'$ есть неперов логарифм a'. Следовательно, *во всякой системе модуль есть не что иное, как единица, деленная на неперов, или натуральный, логарифм основания этой системы логарифмов.*

Если мы снова примем обозначения (58), т. е. если мы обозначим основание какой-либо системы лога-

рифмов через a и его модуль через m, то мы будем иметь $m = \frac{1}{\lg a}$, причем $\lg a$ обозначает натуральный логарифм a, а не логарифм, взятый в системе с основанием a и модулем m.

Но мы видели (59), что между модулем и основанием какой-нибудь системы всегда существует соотношение:

$$m = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{ и т. д.}}.$$

Следовательно, всегда

$$\lg a = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{ и т. д.}, \quad \text{(D)}$$

причем $\lg a$ здесь обозначает неперов логарифм a. Это дает общую формулу для вычисления логарифмов натуральной системы.

Если в этой формуле подставить вместо a его значение $1+b$ (57), то она преобразуется в

$$\lg(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{ и т. д.}$$

Если принять в этом равенстве b отрицательным, то мы получим:

$$\lg(1-b) = -b - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}b^3 - \text{ и т. д.}$$

Вычитая это равенство из предыдущего и замечая, что

$$\lg(1+b) - \lg(1-b) = \lg\frac{1+b}{1-b},$$

мы будем иметь:

$$\lg\frac{1+b}{1-b} = 2\cdot\left(b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 + \text{ и т. д}\right), \quad \text{(E)}$$

хорошо известную формулу, дающую легкий способ построения таблицы натуральных логарифмов.

64. В соответствии со сказанным выше (57 и 58), мы легко можем теперь продиференцировать всякое и показательное и логарифмическое количество; при этом мы будем иметь в виду, что в алгебре пользуются только натуральными или неперовыми логарифмами как самыми простыми; что буква e как правило употребляется для обозначения основания этой системы, т. е. числа, логарифм которого равен единице, и что, наконец, это число почти равно 2,71828182845 (59).

Если теперь потребуется продиференцировать $\lg x$, то мы получим $d\lg x = \frac{dx}{x}$, что проще выражается таким образом: $dlx = \frac{dx}{x}$.

Точно так же найдем:

$$dl(a+x) = \frac{dx}{a+x};\quad dl\frac{a}{a+x} = -\frac{dx}{a+x};$$

$$dl\frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y};\quad dl\frac{a+x}{a-x} = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x};$$

$$dl(aa+xx) = \frac{2x\,dx}{aa+xx}.$$

Если потребуется продиференцировать e^x, то мы получим:

$$de^x = e^x dx.$$

Если потребуется продиференцировать a^x, то мы получим:

$$da^x = a^x\,dx\,l\,a.$$

Подобным же образом мы найдем:

$$dx^y = x^y\left(dy\,l\,x + y\frac{dx}{x}\right);$$

$$d\,(aa+xx)^x = (aa+xx)^x dx\left[l\,(aax+x) + \frac{2x^2}{aa+xx}\right]$$

и т. д.

Согласно всему сказанному о показательных и логарифмических количествах очевидно, что их диференцирование сводится к двум следующим правилам, вытекающим одно из другого (57 и 58).

1. Диференциал логарифма какого-нибудь количества равен диференциалу этого количества, деленному на это количество.

2. Диференциал показательного количества находится путем умножения этого показательного количества на диференциал его логарифма.

Перехожу к диференцированию тригонометрических (angulaires) количеств.

65. *Пусть требуется продиференцировать* $\sin x$, *где* x *есть какая-нибудь дуга круга, радиус которого равен единице.*

Согласно основному принципу диференцирования мы имеем:

$$d \sin x = \sin (x + dx) - \sin x =$$
$$= \sin x \cdot \cos dx + \sin dx \cdot \cos x - \sin x.$$

Но легко видеть, что: 1) косинус бесконечно малой дуги отличается от радиуса только на бесконечно малое количество второго порядка, потому что это количество есть синус-верзус, а синус-верзус равен квадрату синуса, который есть бесконечно малое количество второго порядка, деленному на диаметр минус тот же самый синус-верзус, т. е. на конечное количество: откуда, прежде всего, следует, что можно положить $\cos dx = 1$ и, следовательно, $\sin x \cdot \cos dx = \sin x$; 2) так как окружность можно рассматривать как многоугольник с бесконечным множеством сторон, то $\sin dx$ и dx отличаются один от другого бесконечно мало, потому что dx есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является $\sin dx$, а другим косинус-вер-

зус dx, который есть бесконечно-малое второго порядка.

Следовательно, найденное выше равенство приводится к виду:

$$d \sin x = dx \cdot \cos x.$$

Пусть требуется продиференцировать $\cos x$.

Согласно основному принципу диференцирования будем иметь:

$$d \cos x = \cos(x + dx) - \cos x =$$
$$= \cos x \cdot \cos dx - \sin x \cdot \sin dx - \cos x,$$

равенство, которое согласно вышеуказанным замечаниям приводится к

$$d \cos x = -dx \sin x.$$

Пусть требуется продиференцировать $\operatorname{tg} x$.

Известно, что

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Следовательно,

$$d \operatorname{tg} x = d \frac{\sin x}{\cos x},$$

равенство, которое приводится к виду:

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos x^2}.$$

Так как

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

то аналогично найдем:

$$d \operatorname{ctg} x = \frac{-dx}{\sin x^2}.$$

66. Применяя эти основные правила к другим случаям, мы найдем:

$$d \sin mx = mdx \cos mx,$$

$$d \cos mx = -mdx \sin mx,$$

$$d \sin x^m = mdx \cos x \sin x^{m-1},$$

$$d \cos x^m = -mdx \sin x \cos x^{m-1},$$

$$d \operatorname{tg} mx = \frac{mdx}{\cos mx^2},$$

$$d \operatorname{ctg} mx = \frac{-mdx}{\sin mx^2},$$

$$d \operatorname{tg} x^m = \frac{mdx \operatorname{tg} x^{m-1}}{\cos x^2},$$

$$d \operatorname{ctg} x^m = \frac{-mdx \operatorname{ctg} x^{m-1}}{\sin x^2}.$$

67. После того, что было сказано относительно диференцирования разного рода количеств, представляется очевидным, что диференциал количества, содержащего в себе одно только переменное x, должен иметь в качестве одного из множителей dx, потому что он должен быть равен нулю, если $dx = 0$. Но ни одно из выражений не должно содержать множителей с высшими степенями dx, потому что эти выражения были бы тогда бесконечно малыми относительно других и ими следовало бы пренебречь.

В силу тех же оснований, если функция содержит несколько переменных x, y, z, то диференциал может содержать лишь члены с множителями dx, dy, dz только в первой степени и в нем не должно находиться ни одного члена, который имел бы сомножителем эти диференциалы в высших степенях или перемноженные друг на друга.

Сумма членов, имеющая общим множителем dx, составляет диференциал предложенной функции относительно x, т. е. когда только x рассматривается как переменное; так же обстоит дело и с суммой членов, имеющих общим множителем dy, dz и т. д.

Поэтому полный диференциал заданной функции есть не что иное, как сумма частных диференциалов, которая получается, если последовательно изменять эту функцию по отношению к каждому из содержащихся в ней переменных.

Для этих частных диференциалов употребляются следующие обозначения. Пусть P будет функцией x, y, z и т. д. Частный диференциал этой функции по x обозначается через $\frac{dP}{dx} \cdot dx$; точно так же $\frac{dP}{dy} \cdot dy$ обозначает диференциал функции P по y, и т. д.

Таким образом

$$dP = \frac{dP}{dx} \cdot dx + \frac{dP}{dy} \cdot dy + \frac{dP}{dz} \cdot dz + \text{и т. д.}$$

68. Вместо того чтобы рассматривать систему переменных количеств в двух последовательных состояниях, как мы это делали до сих пор, мы можем рассматривать ее последовательно в двух, трех, четырех или большем числе последовательных состояний, которые все бесконечно мало отличаются друг от друга. Тогда по мере приближения к означенной (désignée) системе первой из вспомогательных систем к ней также будут приближаться и другие системы; причем, если эта первая вспомогательная система совпадает с заданной, то все другие одновременно совпадут с ней, а также уничтожатся все диференциалы, существующие между этими системами.

Бесконечно малые разности между количествами первой вспомогательной системы и соответствующими количествами означенной системы не будут теми же,

что и разности между количествами второй и первой вспомогательных систем; точно так же они будут изменяться от второй системы к третьей, от третьей к четвертой и т. д. Таким образом эти разности оказываются переменными, которые подобно всяким другим будут иметь свои диференциалы. Сохраняя попрежнему для обозначения диференциала всякого вида количеств характеристику d, мы обозначим количество, на которое возрастает dx при переходе от первой вспомогательной системы ко второй, через ddx точно так же, как dx обозначает количество, на которое возрастает x при переходе от системы означенной к этой первой вспомогательной системе. Подобным же образом $dddx$ будет означать количество, на которое возрастает количество ddx при переходе от второй системы к третьей и т. д.

Количества dx, ddx, $dddx$ и т. д. называются *первым*, *вторым*, *третьим* и т. д. *диференциалами* количества x. Подобным же образом dy, ddy, $dddy$ и т. д. суть первый, второй, третий и т. д. диференциалы от y и т. п.

Вместо того чтобы писать ddx, $dddx$, $ddddx$ и т. д., часто сокращенно пишут d^2x, d^3x, d^4x и т. д., что отнюдь не обозначает степеней и не должно быть смешиваемо с $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dx)^4$ и т. д., которые также представляют собой сокращения и обозначают $dx \cdot dx$, $dx \cdot dx \cdot dx$, $dx \cdot dx \cdot dx \cdot dx$, т. е. действительные степени dx (которые обозначают еще, уничтожая скобки, через dx^2, dx^3, dx^4 и т. д.). Эти ddx и т. д. надо, равным образом, отличать от количеств $d(x^2)$, $d(x^3)$ и т. д., которые суть диференциалы степеней x^2, x^3, x^4 и т. д. от x, тогда как первые, наоборот, суть степени диференциалов от x.

69. Из сказанного следует, что диференциалы всех порядков диференцируются, как и всякое другое переменное, и не нуждаются в специальных правилах.

Так, например, диференцируя xy, находим $xdy+ydx$; если же мы продиференцируем этот диференциал, то будем иметь:

$$dxdy+xddy+dydx+yddx.$$

Снова диференцируя последнее выражение, мы получим:

$$3dxddy+3dyddx+xd^3y+yd^3x$$

и т. д.

70. Следует заметить, что хотя d^2x и dx^2 и не одно и то же, но оба эти количества бесконечно-малые второго порядка. Так, например, первый диференциал уравнения $yy=2ax-xx$ есть $ydy=$ $=adx-xdx$, а второй диференциал

$$yd^2y+dy^2=ad^2x-xd^2x-dx^2.$$

Ясно, что уравнение это не может быть однородным, если только все члены его не будут одного порядка, именно второго.

71. Следует также заметить, что если различные переменные связаны уравнениями, то диференциал какого-нибудь из этих переменных всегда можно принять за постоянное; при этом соответствующее переменное принимается за мерило сравнения (terme de comparaison) и служит для определения (régler) всех других. Так, например, в случае кривой мы вполне вправе предположить, что последовательные приращения абсциссы суть рав ые бесконечно-малые; тогда все dx будут равны, и, следовательно, мы будем иметь $ddx=0$; но этим равным приращениям абсциссы будут соответствовать отнюдь не равные приращения ординаты; таким образом ddy не будет равно нулю, и закон, по которому будут меняться эти dy при переходе от одной системы к другой, между тем как dx

остается постоянным, будет тем самым законом, который определяет природу кривой; т. е. природа кривой будет зависеть от соотношений, существующих между последовательными диференциалами dy, ddy, $dddy$ и т. д. означенного (désignée) переменного y.

Применим эти общие правила диференциального исчисления к некоторым примерам.

72. Требуется определить подкасательную кривой, уравнение которой

$$ay^{m+n} = x^m(a-x)^n.$$

Представим себе эту кривую как многоугольник с бесконечным множеством сторон. Пусть MN будет одной из этих сторон (фиг. 1); продолжение этой стороны до встречи с осью кривой в T будет касательной; обозначим эту ось, или же ось абсцисс, TB; затем из концов M и N малой стороны MN проведем бесконечно близкие друг к другу ординаты MP, NQ и из точки M проведем малую прямую MO, параллельную оси и заканчивающуюся на ординате NQ. Линия TP представляет собой искомую подкасательную.

Очевидно, что $MO = dx$, $NO = dy$ и что из подобия треугольников MNO, TMP следует:

$$dy : dx :: y : TP.$$

Следовательно, мы имеем несовершенное уравнение:

$$TP = y\frac{dx}{dy}. \qquad \text{(A)}$$

Теперь, чтобы получить значение $\frac{dx}{dy}$ и подставить его в уравнение (A), я продиференцирую данное уравнение.

При диференцировании это уравнение даст мне:

$$(m+n)\,ay^{m+n-1}\,dy = m\,(a-x)^n\,x^{m-1}\,dx -$$
$$- nx^m\,(a-x)^{n-1}\,dx,$$

т. е. тоже несовершенное уравнение, из которого я найду:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)\,ay^{m+n-1}}{m\,(a-x)^n x^{m-1} - nx^m\,(a-x)^{n-1}}. \qquad \text{(B)}$$

Подставляя это значение $\frac{dx}{dy}$ в уравнение (A), я получу:

$$TP = \frac{(m+n)\,(ax-xx)}{ma-mx-nx},$$

т. е. уравнение, которое, будучи свободным от всяких элементов бесконечности, является строго точным и дает мне искомое значение подкасательной TP.

73. Требуется определить наибольшие и наименьшие ординаты кривой, уравнение которой (фиг. 5):

$$yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb.$$

Фиг. 5.

Очевидно, что наибольшие и наименьшие ординаты данной кривой соответствуют точкам, в которых касательная становится параллельной оси абсцисс, или, что то же самое, если рассматривать кривую как многоугольник с бесконечным множеством сторон, это те ординаты, которые соответствуют малым сторонам, параллельным оси абсцисс. Отсюда следует, что ордината остается той же самой на всем протяжении этой малой стороны, т. е. что в точке *ма-*

ксимума или *минимума* этой ординаты ее диференциал становится нулем, хотя диференциал абсциссы не будет таковым. Следовательно, мы получаем:

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Применим этот принцип к данному уравнению; диференцируя его, мы получим несовершенное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a-2x}{2y-2b}.$$

Это количество, значит, должно быть равно нулю, что дает:

$$3a-2x=0,\ \text{или}\ x=\frac{3}{2}a,$$

и, следовательно,

$$y=b\pm\frac{1}{2}a.$$

Уравнения эти, будучи свободны от всяких элементов бесконечности, являются строго точными.

74. Требуется найти максимум или минимум функции $ax^3-bxy^2+f^2z^2-gxyz$ нескольких переменных x, y, z.

Когда функция достигает своего *максимума*, она перестает увеличиваться и затем начинает уменьшаться, независимо от того, будут ли отдельные входящие в нее переменные продолжать увеличиваться или уменьшаться. А когда функция достигает своего *минимума*, то она необходимо перестает уменьшаться и затем начинает увеличиваться, независимо от того, будут ли отдельные переменные увеличиваться или уменьшаться. Таким образом в случае *максимумов* и *минимумов* диференциал функции всегда равен нулю, хотя диференциалы отдельных переменных и не равны ему.

Для того чтобы применить этот принцип к данному случаю, я сперва предположу, что мы уже нашли определенные значения y и z, удовлетворяющие предложенному условию; тогда останется только определить значение x. Мы это сделаем, диференцируя данную функцию только по x, приравнивая результат нулю и деля все на dx, что даст:

$$3ax^2 - by^2 - gyz = 0.$$

Прилагая это же рассуждение к переменным y и z, мы, равным образом, получим:

$$2bxy + gxz = 0,$$
$$2f^2z - gxy = 0,$$

т. е. уравнения, которые, будучи все совершенно независимыми от элементов бесконечности, являются строго точными. Таковы, следовательно, три конечных уравнения, которым должны удовлетворять x, y, z. Благодаря этому вопрос приводится к обыкновенному анализу.

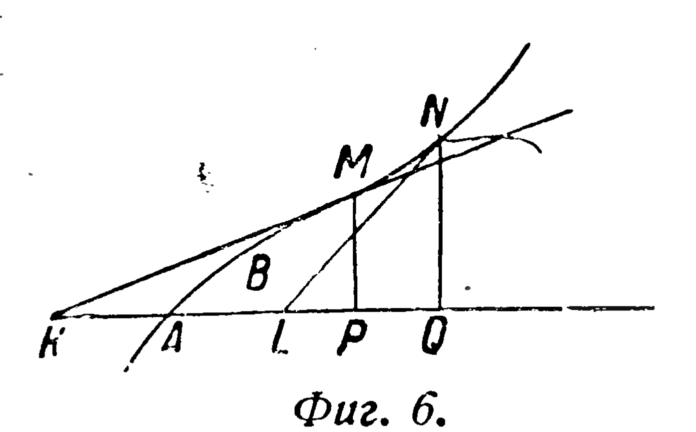
Эти три последовательных диференцирования, очевидно, дают то же, что мы получили бы, если бы диференцировали функцию сразу по всем переменным и приравняли нулю множители при диференциалах каждого из этих переменных.

75. Требуется, если она существует, найти точку перегиба кривой, уравнение которой

$$b^2y = ax^2 - x^3.$$

Пусть $ABMN$ (фиг. 6) есть данная кривая, AP — абсцисса и MP — ордината, соответствующие искомой точке перегиба M. Проведем в этой точке перегиба касательную MK. Очевидно, что угол KMP есть *максимум*, т. е. больше, чем угол LNQ, образованный

какой-нибудь другой касательной NL и соответствующей ординатой NQ. Следовательно, тангенс угла KMP также будет *максимумом*.



Фиг. 6.

Но этот тангенс равен $\frac{dx}{dy}$, следовательно,

$$d\frac{dx}{dy}=0.$$

Но так как кривая имеет уравнение

$$b^2y=ax^2-x^3,$$

то

$$\frac{dx}{dy}=\frac{b^2}{2ax-3x^2}.$$

Следовательно, должно быть:

$$d\,\frac{b^2}{2ax-3x^2}=0,$$

что дает:

$$x=\frac{1}{3}\,a.$$

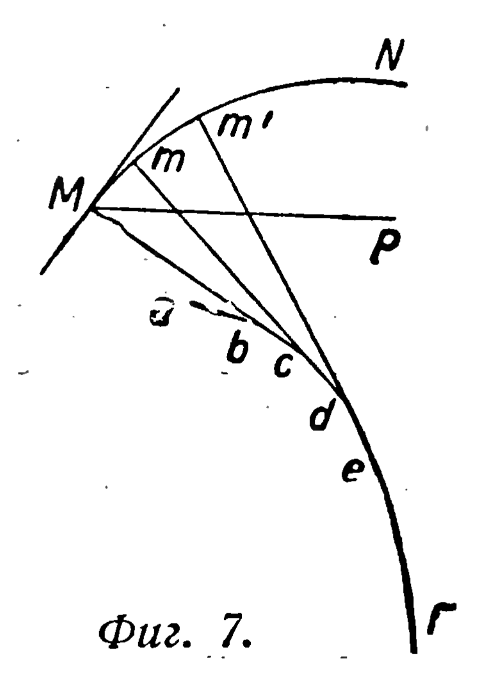
Уравнение это, будучи свободным от всяких элементов бесконечности, является строго точным.

76. *Требуется найти радиус соприкасающегося круга кривой, уравнение которой* $yy=ax$ (фиг. 7).

Пусть кривая $abcdeF$ обернута некоторой нитью, один конец которой закреплен в какой-нибудь точке F этой кривой, а другой конец которой пусть будет M. Если представить себе теперь, что эта нить, постоянно оставаясь натянутой, разворачивается и что ее конец M чертит новую кривую Mmm', то эта новая кривая называется *развертывающей* первой кривой, а первая кривая называется *разверткой*.

Часть нити, заключающаяся в каждый данный момент между разверткой и развертывающей, называется

радиусом развертки; таким образом для точки M развертывающей радиусом развертки является прямая Mb, mc есть радиус развертки в точке m и т. д.



Фиг. 7.

Если рассматривать развертку как многоугольник с бесконечным множеством сторон ab, bc, cd и т. д., то малые части Mm, mm' и т. д. развертывающей превратятся в малые дуги кругов, центры которых находятся в точках c, d и т. д. Поэтому круги, которые имеют радиусы Mc, md и т. д. и у которых малые дуги сливаются с дугами развертывающей, называются кругами, соприкасающимися с этой кривой в тех местах, где они сливаются. Поэтому радиусы этих соприкасающихся кругов, называемые на этом основании также радиусами кривизны, суть не что иное, как радиусы развертки.

Таким образом дело идет о нахождении радиуса развертки для какой-нибудь точки M развертывающей. Так как величина угла измеряется соответствующей ему дугой круга, радиус которого равен единице, то очевидно, что дуга

$$Mm = Mc \cdot Mcm, \qquad \text{(A)}$$

и так как радиусы Mc, md будут последовательно перпендикулярны к малым дугам Mm, mm' и, следовательно, к соответственным их касательным в точках M, m, то угол Mcm, образованный этими радиусами, будет тот же, что и угол, который образуют эти касательные. Но очевидно, что для любой кривой угол, образованный двумя касательными, равен приращению, которое получает при переходе от одной ординаты к другой угол, образованный ординатой с первой из этих ка-

сательных. Следовательно, если две касательных бесконечно близки одна к другой, то угол, который они образуют, а значит, также угол Mcm, который образуют соответствующие радиусы кривизны Mc, md, будет диференциалом угла, образованного касательной к кривой и ординатой.

Следовательно, предполагая, что MT—касательная в точке M, а MP—ордината, и обозначив через R радиус кривизны, s — соответствующую дугу, x и y — координаты, мы, в силу найденного выше уравнения (A), получим:

$$ds = R \cdot dTMP. \tag{B}$$

Но тангенс угла TMP есть $\frac{dx}{dy}$ (72), и, кроме того, известно (65), что диференциал угла равен диференциалу его тангенса, умноженному на квадрат косинуса. Следовательно,

$$d\,TMP = \cos TMP^2 \cdot d\frac{dx}{dy} = \frac{dy^2}{ds^2} \cdot d\frac{dx}{dy}.$$

Поэтому уравнение (B) примет вид:

$$ds = R\frac{dy^2}{ds^2} \cdot d\frac{dx}{dy},$$

откуда мы получим:

$$R = \frac{ds^3}{dy^2 \cdot d\frac{dx}{dy}}. \tag{C}$$

Теперь применим эту общую формулу, представляющую собой только несовершенное уравнение, к нашему случаю, т. е. к кривой, уравнение которой

$$yy = ax.$$

Диференцируя это уравнение, имеем:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$$

и, следовательно,

$$d\,\frac{dx}{dy} = \frac{2dy}{a}.$$

Таким образом уравнение (C) примет вид:

$$R = \frac{ads^3}{2dy^3},$$

или, так как

$$ds = \sqrt{dx^2 - dy^2},$$

$$R = \frac{a(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{2dy^3} = \frac{1}{2}\,a\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя в это несовершенное уравнение вместо $\frac{dx}{dy}$ его значение $\frac{2y}{a}$ и делая приведения, мы получим:

$$R = \frac{4(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2} = \frac{(4x + a)^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}},$$

т. е. уравнение, которое, будучи свободно от всяких элементов бесконечности, является строго точным.

Об интегральном исчислении

77. Не следует упускать из виду, что неконечные (infinitésimales) количества являются всегда только вспомогательными количествами, вводимыми в вычисления исключительно для облегчения сравнения количеств означенных, т. е. тех количеств, отношение между которыми желают найти, и что окончательной целью всегда является их исключение.

Когда для выполнения этого исключения достаточны обыкновенные преобразования алгебры, то

производимые действия относятся к так называемому *диференциальному исчислению*. Но когда этого исключения можно достичь только применяя действия, обратные тем, которые производят для диференцирования предложенных количеств, то эти действия становятся предметом так называемого *интегрального исчисления*.

Интегрировать какое-нибудь диференциальное количество — это значит найти количество, которое при диференцировании дает предложенное диференциальное количество.

Но это обратное действие является гораздо более трудным, чем прямое действие, точно так же как деление труднее умножения, относительно которого оно является лишь обратным действием; или как извлечение корней более сложно, чем возведение в степень, для которого оно также является обратным действием, или же как, наконец, решение уравнений гораздо более трудно, чем их составление: ведь и достигают, вообще, этого решения только для уравнений низших степеней.

Между прочим, существует много диференциальных выражений, например вида ydx, которые не могут на деле получиться ни при каком диференцировании и которые поэтому нельзя интегрировать; есть и другие, которые, может быть, и интегрируемы, но способ интегрирования которых еще не известен.

78. Количество, диференцирование которого дает данный диференциал, называется *интегралом* этого диференциала, потому что считают, что он образуется из последовательных бесконечно малых приращений; каждое из этих приращений есть то, что мы назвали *диференциалом* возрастающего количества, это как бы некоторая дробь, и сумма всех этих дробей и есть целое искомое количество, которое на этом основании и называют *интегралом* этого диференциала.

На том же самом основании называют *интегрированием*, или *суммированием*, действие нахождения интеграла или суммы всех последовательных бесконечно малых приращений, образующих ряд, в котором данный диференциал, по существу, является общим членом.

79. Так как интеграл рассматривают как сумму элементов, называемых *диференциалами*, то его условились в вычислении обозначать посредством характеристики $\int$, которая принимается за сокращение слова *сумма*. Таким образом знак $\int$ уничтожает действие знака d, так что $\int dx$ есть не что иное, как само количество x.

Очевидно, что два переменных количества, постоянно равные между собой, увеличиваются в каждый момент одинаково и что, следовательно, их диференциалы равны между собой. То же самое имело бы место, если бы даже эти два количества в начале изменения различались на какое-нибудь другое количество; если только эта первоначальная разность всегда будет одна и та же, то их диференциалы всегда будут равны.

Очевидно, обратно, и то, что два переменных количества, которые в каждый момент получают равные бесконечно малые приращения, должны постоянно быть равными между собой или же различаться всегда на одно и то же количество, т. е. очевидно, что интегралы двух равных диференциалов могут отличаться друг от друга только на постоянное количество.

На том же самом основании, если два каких-либо количества отличаются друг от друга бесконечно мало, то и диференциалы их будут также отличаться бесконечно мало; и, наоборот, если два диференциальных количества бесконечно мало отличны друг от

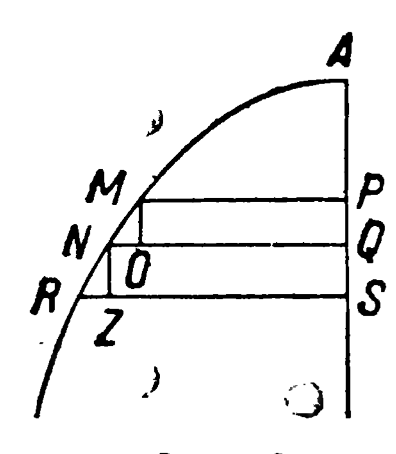
друга, то их интегралы, если не говорить о постоянном, могут отличаться друг от друга также только бесконечно мало.

80. На этих-то принципах и основано применение правил интегрального исчисления. Пусть, например, требуется определить площадь AMP кривой (фиг. 8) $AMNR$, заключенную между дугой AM этой кривой, ее абсциссой AP и ее ординатой MP.

Если представить себе, что абсцисса AP или x увеличивается на бесконечно малое количество PQ или dx, то искомая площадь кривой увеличится на малую смешаннолинейную трапецию $MNQP$. Следовательно, эта малая трапеция будет элементом или диференциалом искомой площади, и мы сперва получим:

$$AMP = \int MNQP. \qquad \text{(A)}$$

С другой стороны, пренебрегая малым смешаннолинейным треугольником MNO, который, очевидно, бесконечно мал по сравнению с трапецией, мы получим, что площадь этой трапеции, принимаемой равной прямоугольнику $MOQP$, равна произведению $y\,dx$, т. е. его основания y на его высоту dx. Следовательно, $y\,dx$ бесконечно мало отличается от диференциала искомой площади. Поэтому (79) $\int y\,dx$ будет, если не говорить о постоянном, бесконечно мало отличаться от $\int MNQP$ или AMP, и, значит,



Фиг. 8.

$$AMP = \int y\,dx + C. \qquad \text{(B)}$$

Это такое уравнение, которое я называл выше *несовершенным*.

Предположим, например, что кривая будет обыкновенной параболой с параметром p. Мы будем иметь тогда $yy = px$ и, диференцируя, $2y\,dy = p\,dx$. Следовательно,

$$dx = \frac{2y\,dy}{p};$$

подставляя это значение в уравнение (A), мы получим:

$$AMP = \int \frac{2y^2\,dy}{p} + C.$$

Но (55)

$$d\,\frac{2y^3}{3p} = \frac{2y^2\,dy}{p}.$$

Следовательно, наоборот,

$$\int \frac{2y^2\,dy}{p} = \int d\,\frac{2y^3}{3p} = \frac{2y^3}{3p}. \qquad (79)$$

Поэтому уравнение (B) преобразуется в

$$AMP = \frac{2}{3}\frac{y^3}{p} + C,$$

или, так как $yy = px$, в

$$AMP = \frac{2}{3}xy + C. \qquad (C)$$

Но это уравнение, которое я до настоящего момента считал только несовершенным, не заключает в себе никаких бесконечно малых (infinitésimales) количеств и, значит, оно стало совершенно точным. Таким образом площадь параболы в точности равна $\frac{2}{3}xy + C$.

Мне осталось лишь определить постоянное C. Для этого я замечу, что, так как начало абсцисс находится в A, то если мы предположим $x = 0$, то и $y = 0$.

И так как мы ищем всю площадь, отсчитывая от точки A, то мы будем иметь также $AMP = 0$.

Далее, так как уравнение

$$AMP = \frac{2}{3}xy + C$$

имеет место при любом значении x, то из него следует, что

$$0 = 0 + C, \text{ или } C = 0.$$

Следовательно, уравнение, выражающее площадь параболы, имеет вид:

$$AMP = \frac{2}{3}xy.$$

По этому примеру можно представить себе, какое употребление можно придать интегральному исчислению и насколько важно отыскать способы переходить от диференциальных уравнений, которые можно найти, выражая условия проблемы, к вытекающим из них интегральным уравнениям (équations intégrales).

81. Правила интегрального исчисления с необходимостью вытекают из правил диференциального исчисления, являющегося для него обратным.

Подробное изложение правил не может быть предметом произведения, подобного нашему. Мы удовлетворимся тем, что дадим о них лишь общее представление. Рассмотрим сначала тот случай, когда в диференциальное выражение входит только одно единственное переменное.

Требуется проинтегрировать одночлен $ax^m dx$; я утверждаю, что мы получим:

$$\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1},$$

если не говорить о постоянном, которое я для большей простоты буду подразумевать.

В самом деле, если продиференцировать согласно установленному правилу (55) $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$, то мы будем иметь $ax^m\,dx$. Следовательно, наоборот, интеграл от $ax^m\,dx$ есть, как мы говорили, $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$. Следовательно, вообще, *чтобы проинтегрировать диференциальный одночлен с одним переменным, надо: 1) увеличить показатель переменного на единицу, 2) разделить на этот увеличенный на единицу показатель и на диференциал переменного.*

Это правило справедливо, независимо от того, будет ли показатель положительным или отрицательным, целым или дробным.

Если бы диференциальный одночлен стоял под радикалом, то для применения предыдущего правила нужно было бы сперва преобразовать этот радикал в дробный показатель.

82. Данное выше правило имеет, однако, одно исключение, именно в случае, когда $m = -1$, потому что тогда интеграл получился бы равным $\frac{a}{0}$, т. е. оказался бы бесконечным количеством. В этом случае истинный интеграл есть $a \lg x$, т. е.

$$\int \frac{a\,dx}{x} = a \lg x,$$

ибо, действительно, мы имеем (64), что

$$d\,a \lg x = \frac{a\,dx}{x}.$$

Но следует заметить, что, для того чтобы интеграл был полным (complète), следует присоединить к нему постоянное C.

Таким образом в действительности:

$$\int \frac{a\,dx}{x} = a \lg x + C.$$

Если желают, чтобы интеграл начинался, когда $x = 0$, т. е. чтобы $\int \frac{a\,dx}{x}$ был 0, когда x есть 0, то имеют:

$$0 = a \lg 0 + C, \text{ или } C = -a \lg 0.$$

Следовательно, полный интеграл будет:

$$\int \frac{a\,dx}{x} = a \lg x - a \lg 0 = a \lg \frac{x}{0},$$

т. е. будет бесконечным. Это и объясняет, почему данное выше правило дает для $\int ax^m\,dx$ бесконечное количество, когда $m = -1$.

83. Так как мы умеем проинтегрировать любой одночлен, то мы сможем проинтегрировать и любой ряд одночленов, как, например:

$$ax^3\,dx + \frac{bx^2\,dx}{c} - f\,dx,$$

потому что для этого достаточно будет применить найденное правило к каждому из этих одночленов в отдельности. Таким образом, попрежнему оставляя в стороне постоянное, мы получим:

$$\int \left(ax^3 dx + \frac{bx^2\,dx}{c} - f dx\right) = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} - fx.$$

Очевидно, что это же правило применяется в случае, когда в диференциальное выражение входят

сложные количества, если только они не находятся в знаменателе и если их показатель — целое и положительное число. Действительно, достаточно возвысить в указанную степень, чтобы обратить функцию в ряд одночленов.

84. Это же правило применяется и в случае, когда данная, хотя бы и сложная функция возведена в какую-нибудь дробную или отрицательную степень, если только совокупность всех членов, на которую умножено это сложное количество, является диференциалом находящегося под показателем количества, умноженным на некоторое постоянное.

Действительно, для приведения этого случая к первому, очевидно, достаточно положить это сложное количество равным некоторому новому простому переменному.

Пусть, например, требуется проинтегрировать диференциальное выражение

$$(a+bx)^m\,dx,$$

содержащее сложную функцию $(a+bx)^m$. Независимо от того, будет ли показатель m отрицательным или дробным, этот диференциал все равно интегрируем, потому что множитель dx есть умноженный на постоянное диференциал сложного количества, находящегося под показателем степени. В самом деле, пусть

$$a+bx=y.$$

Диференцируя, мы будем иметь:

$$b\,dx=dy, \text{ или } dx=\frac{dy}{b}.$$

Следовательно, интегрируемое выражение примет

вид $\frac{y^m dy}{b}$, интеграл которого есть $\frac{y^{m+1}}{(m+1)b}$. Подставляя вместо y его значение $a+bx$, будем иметь:

$$\int (a+bx)^m dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)b}.$$

85. Применение этого правила может быть распространено на все те случаи, когда показатель переменного, стоящего вне бинома, увеличенный на единицу, делится на показатель того же переменного в биноме и дает в частном целое положительное число.

Пусть, например, требуется проинтегрировать диференциальное выражение

$$(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} x^3 dx.$$

3, показатель переменного, стоящего вне бинома, будучи увеличено на единицу, равно 4, что без остатка делится на 2, т. е. на показатель переменного в биноме, давая в частном целое положительное число. Из этого я заключаю, что данный диференциал интегрируем и что для получения искомого интеграла надлежит только положить бином $a+bx^2$ равным новому переменному.

В самом деле, если положить $a+bx^2=y$ и выполнить указанные действия, то найдем, оставляя в стороне постоянное:

$$\int (a+bx^2)^{\frac{4}{5}} x^3 dx =$$

$$= \frac{1}{2b^2} (a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1} \cdot \left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a\right].$$

86. Когда диференциальное выражение с одним переменным не подходит под изложенное только что

правило или не принадлежит к числу тех, которые, как мы это видели, под него подводятся, то стараются привести их к нему путем различных преобразований. Когда и это не удается, то данные выражения разлагают в образующие бесконечные последовательности одночленов ряды и интегрируют их приближенно.

Пусть теперь требуется проинтегрировать $dz \cos z$. Я утверждаю, что мы получим:

$$\int dz \cos z = \sin z + C,$$

где C есть постоянное, которое надлежит прибавлять ко всякому интегралу.

В самом деле, диференцируя $\sin z + C$ по установленному правилу (65), мы будем иметь $dz \cos z$; следовательно, наоборот, интеграл от

$$dz \cos z \text{ есть } \sin z + C.$$

Подобным же образом, вообще,

$$\int dz \cos mz = \frac{1}{m} \sin mz + C.$$

Пусть требуется проинтегрировать $dz \sin mz$. Мы получим:

$$\int dz \sin mz = -\frac{1}{m} \cos mz + C,$$

ибо, диференцируя это уравнение (65), придем к тождеству.

Пусть требуется проинтегрировать $dz \cos z \cdot \sin z^n$.

Я замечаю, что $dz \cos z$ есть диференциал от $\sin z$; следовательно, это интегрирование подходит под общее правило одночленов, которое дает:

$$\frac{1}{n+1} \sin z^{n+1}.$$

87. Рассмотрим теперь диференциальные выражения, содержащие несколько переменных.

Так как для диференцирования функции, содер ащей несколько переменных, ее надо последовательно продиференцировать относительно каждого из них, рассматривая все другие как постоянные, то, наоборот для интегрирования диференциального выражения с несколькими переменными нужно сначала принять в нем только одно из них за переменное и, следовательно, интегрировать так, как если бы все остальные были постоянными, а диференциалы их равными нулю. Найдя, таким образом, интеграл, его диференцируют по всем переменным, чтобы узнать, будет ли найденный таким образом диференциал тождественно равным заданному. Если это так, интеграл верен и остается только присоединить к нему постоянное; если это не так, то, отняв от предложенного количества количество найденное, мы получим количество, которое нужно будет проинтегрировать и затем прибавить к уже найденному.

88. Пусть, например, требуется проинтегрировать диференциал

$$3x^2y\,dx + x^3\,dy + 5xy^4\,dy + y^5\,dx.$$

Я интегрирую, считая переменным одно только x, и, следовательно, как если бы y было постоянным, а dy было бы равно 0; при этом я получаю $x^3y + y^5x$. Диференцирование этого количества при изменении x и y мне дает:

$$3x^2y\,dx + y^5\,dx + x^3\,dy + 5xy^4\,dy,$$

что равно заданному нам выражению.

Из этого я заключаю, что искомый интеграл действительно есть

$$x^3y + y^5x$$

плюс постоянное.

Пусть требуется проинтегрировать

$$x^3\,dy + 3x^2y\,dx + x^2\,dz + 2xz\,dx + x\,dx + y^2\,dy.$$

Я интегрирую, считая переменным одно только x и, следовательно, принимая dy и dz за нули. Я получу:

$$x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}.$$

Затем, я диференцирую это количество, изменяя x, y, z, и получаю:

$$3x^2y\,dx + x^3\,dy + 2xz\,dx + x^2\,dz + x\,dx.$$

Далее, я вычитаю этот диференциал из данного и получаю в остатке $y^2\,dy$. Поэтому я нахожу интеграл последнего количества, т. е. $\frac{y^3}{3}$, который и присоединяю к уже найденному. Полный интеграл я получаю в виде:

$$x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Это выражение при диференцировании действительно приводит к заданному диференциальному выражению.

89. Так как сами диференциальные выражения можно диференцировать, то функции, содержащие вторые, третьи и т. д. диференциалы, можно интегрировать. Пусть, например, требуется проинтегрировать диференциальное выражение второго порядка

$$dx^2 + x\,ddx + a\,ddx - dy^2,$$

в котором dy мы будем считать за постоянное. Следуя сказанному выше, т. е. интегрируя так, как будто бы переменным было только ddx, доведя действия

до конца и пополнив интеграл постоянным слагаемым Cdy того же самого порядка, что и другие количества формулы, мы будем иметь:

$$x\,dx + a\,dx - y\,dy + C\,dy,$$

т. е. диференциальное выражение, которое при новом интегрировании даст:

$$\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C'.$$

Мы не будем более распространяться относительно принципов интегрального исчисления; для нашей цели достаточно сказанного. Поэтому же мы ограничимся несколькими примерами приложения интегрального исчисления, отсылая для ознакомления с прочими частями этой обширной науки к трудам ученых авторов, изложивших ее ex professo.

90. Требуется найти площадь кривой, уравнение которой

$$y = (x + a)^{\frac{1}{m}};$$

для большей простоты координаты предполагаются прямоугольными.

Чтобы найти площадь кривой, мы представим себе, что она образуется путем непрерывного возрастания благодаря последовательному прибавлению малых смешаннолинейных трапеций, заключенных между последовательными ординатами, соответствующими бесконечно малым приращениям абсциссы, так что последняя из этих малых трапеций есть диференциал искомой площади, а самая площадь — интеграл этого диференциала.

Если обозначить искомую площадь через Z, то dZ будет величиной последней малой смешаннолинейной трапеции.

С другой стороны, если пренебречь малым смешаннолинейным треугольником, заключенным между дугой кривой и малыми линиями dx и dy и, очевидно, бесконечно малым по сравнению с этой трапецией, то площадь этой последней сведется к прямоугольнику с основанием y и высотой dx, т. е. к $y\,dx$.

Следовательно, для всякой кривой мы получим несовершенное уравнение:

$$dZ = y\,dx,$$

а, значит, также

$$Z = \int y\,dx, \qquad \text{(A)}$$

Но в настоящем случае мы по предположению имеем:

$$y = (x+a)^{\frac{1}{m}}.$$

Подставляя это значение y в уравнение (A), мы получим новое несовершенное уравнение:

$$dZ = (x+a)^{\frac{1}{m}}\,dx,$$

которое после интегрирования даст:

$$Z = \frac{m}{m+1}(x+a)^{\frac{m+1}{m}} + C,$$

равенство, которое, будучи свободно от всяких элементов бесконечности, является строго точным.

91. Требуется спрямить кривую, уравнение которой

$$y^3 = ax^2,$$

предполагая координаты прямоугольными.

Для спрямления кривой мы рассмотрим ее как многоугольник с бесконечным множеством сторон и

представим себе, что она образуется путем непрерывного возрастания, благодаря последовательному прибавлению этих малых сторон по мере возрастания самой абсциссы; так что последняя из этих малых сторон есть диференциал искомой дуги, а самая дуга — интеграл этого диференциала.

Если обозначить искомую дугу через s, то ds будет последней из малых сторон многоугольника; и так как эта малая сторона есть гипотенуза треугольника, другими сторонами которого являются dx и dy, то мы для всякой кривой получим несовершенное уравнение:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Я говорю — несовершенное уравнение, потому что, рассматривая кривую как многоугольник с бесконечным множеством сторон, совершают ошибку, но эта ошибка может быть предположена сколь угодно малой.

Следовательно (интегрируя), мы получим также несовершенное уравнение:

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad \text{(A)}$$

Но в настоящем случае мы по предположению имеем:

$$y^3 = ax^2,$$

откуда

$$x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Диференцируя, мы получим:

$$dx = \frac{3y^{\frac{1}{2}}dy}{2a^{\frac{1}{2}}}$$

и, следовательно,

$$dx^2 = \frac{9y\,dy^2}{4a}.$$

Подставляя это значение в формулу (A), мы будем иметь:

$$s = \int dy\left(\frac{9y}{4a} + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выполняя указанные действия и прибавив постоянное, мы найдем:

$$s = \frac{8a}{27}\left(\frac{9y}{4a} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + C,$$

уравнение, которое, будучи свободно от всяких элементов бесконечности, является строго точным.

92. Требуется найти объем параболоида, образованного вращением около своей оси параболы, имеющей уравнение

$$yy = px,$$

где p есть параметр.

Чтобы найти объем тела, мы представим себе, что оно образуется путем непрерывного возрастания благодаря последовательному прибавлению бесконечно тонких слоев, заключенных между перпендикулярными к оси сечениями, соответствующими последовательным бесконечно малым приращениям абсциссы, так что последний из этих слоев есть диференциал искомого объема, а самый объем есть интеграл этого диференциала.

Если обозначить искомый объем через V, то dV будет величиной последнего слоя.

С другой стороны, если пренебречь вырезками, заключенными между внешней поверхностью данного тела и малой призмой, имеющей основанием меньшее из оснований слоя, вырезками, очевидно, бесконечно

малыми по сравнению с этим слоем, то последний сведется к этому меньшему основанию, умноженному на его высоту dx. Следовательно, обозначив через k это основание, мы для всех тел получим такое несовершенное уравнение:

$$dV = k\,dx$$

и, следовательно, также

$$V = \int k\,dx. \qquad \text{(A)}$$

В настоящем случае дело идет о теле вращения и k есть круг с радиусом y, поэтому, обозначив через $\bar{\omega}$ отношение окружности к диаметру, мы будем иметь:

$$k = \bar{\omega} y^2.$$

Тогда несовершенное уравнение (A) примет вид:

$$V = \int \bar{\omega} y^2\,dx. \qquad \text{(B)}$$

Но по предположению $y^2 = px$ и, следовательно,

$$V = \int \bar{\omega}\; px\,dx,$$

или, выполняя указанные действия:

$$V = \frac{1}{2}\bar{\omega} p x^2 + C,$$

или

$$V = \frac{1}{2}\bar{\omega} y^2 x + C,$$

уравнение, которое, будучи совершенно свободным от всяких элементов бесконечности, является совершенно строгим.

Для определения C надо установить точку отсчета для искомого объема. Если, например, исходить из вершины оси, то получится $x=0$ и $V=0$, и, следовательно, $C=0$. Формула тогда примет вид:

$$V=\frac{1}{2}\overline{\omega}y^2x,$$

т. е. искомый объем будет равен произведению основания $\overline{\omega}y^2$ на половину высоты $\frac{1}{2}x$.

93. Требуется найти центр средних расстояний или центр тяжести пирамиды.

Для того чтобы получить расстояние центра тяжести нескольких тел от данной плоскости, надо умножить массу каждого из этих тел на его расстояние от данной плоскости и все разделить на сумму масс.

Заметив это, представим себе, что из вершины пирамиды к центру средних расстояний ее основания проведена прямая; очевидно, что искомый центр средних расстояний пирамиды будет находиться на этой прямой. Следовательно, остается узнать, каково расстояние этого центра от основания этой пирамиды, и это мы должны найти, пользуясь установленным выше принципом.

Для этого я назову H — высоту пирамиды, B — ее основание и x — расстояние вершины до какого-нибудь из сечений, параллельных этому основанию.

Если x увеличится на dx, то малый слой, соответствующий этому увеличению, будет диференциалом объема этой пирамиды.

Но так как сечения, параллельные основанию, пропорциональны квадратам расстояния до вершины, то сечение, соответствующее высоте x, будет $\frac{B}{H^2}x^2$.

Поэтому объем слоя, если пренебречь вырезком как бесконечно малым по сравнению с ним, будет:

$$\frac{B}{H^2}\, x^2\, dx.$$

Следовательно, его момент относительно основания будет:

$$\frac{B}{H^2}\, (H - x)\, x^2\, dx.$$

Но для того чтобы найти искомое расстояние центра средних расстояний пирамиды от основания, нужно сумму этих моментов или же интеграл этого диференциального выражения разделить на объем пирамиды. Если назвать это расстояние через Y, то мы получим несовершенное уравнение:

$$Y = \frac{\int \frac{B}{H^2}(H - x)\, x^2\, dx}{\int \frac{B}{H^2}\, x^2\, dx},$$

или же, выполняя указанные действия и производя упрощения:

$$Y = \frac{\frac{B}{H^2}\left(\frac{1}{3}\, Hx^3 - \frac{1}{4}\, x^4\right) + C}{\frac{B}{H^2}\frac{1}{3}x^3 + C},$$

уравнение, которое, не заключая более количеств бесконечно малых, является совершенно точным.

Для окончания решения надо определить постоянные C, C', но так как дело идет о всей пирамиде, то сначала нужно предположить $x = 0$. Тогда оба интеграла превратятся в 0, и, следовательно, $C = 0$ и $C' = 0$. Поэтому уравнение преобразуется в

$$Y = H - \frac{3}{4}x.$$

Положив $x=H$, мы для всей пирамиды получим:

$$Y=\frac{1}{4}H,$$

т. е. искомый центр средних расстояний пирамиды находится на прямой, проведенной из вершины к центру средних расстояний основания, и лежит на расстоянии четверти этой линии от основания.

94. Требуется найти уравнение кривой, подкасательная которой находится в данном отношении к абсциссе, т. е. такой кривой, что если абсциссу обозначить x, то подкасательная будет mx, где m предполагается постоянным.

Общая формула подкасательной к какой-нибудь кривой с координатами x и y есть $y\frac{dx}{dy}$, другими словами, $y\frac{dx}{dy}$ бесконечно мало отличается от подкасательной. Следовательно, в данном случае мы имеем несовершенное уравнение:

$$mx=y\frac{dx}{dy},$$

откуда я получаю:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{mx};$$

интегрируя:

$$\lg y=\frac{1}{m}\lg x+\lg a,$$

где a есть постоянное.

Умножая на m и производя приведения, будем иметь:

$$\lg y^m=\lg x+\lg a^m,$$

или

$$\lg y^m=\lg a^m x,$$

или, наконец,

$$y^m=a^m x,$$

уравнение, которое, будучи свободно от всяких элементов бесконечности, является строго точным.

95. Вариационное исчисление является одним из самых блестящих творений нашего бессмертного Лагранжа. Основной целью этого исчисления является решение общим способом знаменитых вопросов о *максимумах* и *минимумах*, столь долго занимавших первых математиков Европы вскоре после изобретения исчисления бесконечно-малых.

Уже Эйлер обсуждал эти вопросы с обычными для него глубиной и ясностью в специальном труде, озаглавленном: «Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimaque proprietate gaudentes». Но алгорифмом, который выделил эту прекрасную теорию и сообщил ей насколько возможно однообразный и простой метод (marche), мы обязаны Лагранжу.

В обыкновенных задачах на maxima и minima дело идет о нахождении некоторых определенных значений, которые следует придать различным переменным, входящим в ту или другую данную конечную функцию этих переменных, для того чтобы эта функция получила наибольшее или наименьшее из возможных значений.

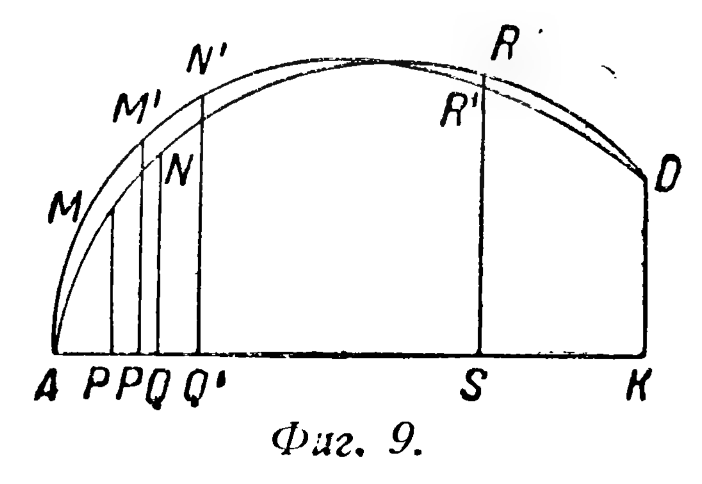
Наоборот, в вариационном исчислении дело идет об определении самых соотношений между переменными, т. е. таких уравнений между ними, при которых удовлетворяются условия maximum или minimum. Сверх того, функция, которая должна быть maximum или minimum, не составлена, как в обыкновенных задачах, только из конечных количеств, а является лишь некоторым указанным (seulement indiquée) интегралом от неинтегрируемого диференциального выражения [1].

---

[1] Карно имеет здесь в виду то обстоятельство, что входящая в интеграл функция неизвестна и интеграл пока только написан в общем виде (например, $\int y\,dx$). Поскольку в подинтегральном выражении стоят различные переменные y и x, а выражение y через x неизвестно, проинтегрировать $y\,dx$ нельзя. (*Прим. ред.*)

96. Пусть, например, нужно провести на плоскости (фиг. 9) между двумя точками A, D такую кривую, с осью AK и ординатой DK, проведенной из точки D перпендикулярно к этой оси, чтобы площадь, заключенная между кривой и координатами AK и DK, была maximum для всех кривых одной и той же длины.

Хотя эта задача и принадлежит к общей теории о maximis и minimis, но очевидно, что она по природе своей совершенно отлична от тех, о которых мы уже говорили (73), потому что здесь речь идет отнюдь не о нахождении определенных значений AK, DK для x и y, которые удовлетворяли бы данной задаче, — ведь эти значения уже даны, — но об определении самой природы кривой, т. е. общего уравнения, которое должно иметь место для координат всех ее точек.



Фиг. 9.

Площадь, заключенная между этой кривой, какова бы она ни была, и крайними координатами AK, DK, есть $\int y\,dx$; следовательно, этот только указанный (simplement indiquée) интеграл должен быть maximum. Таким образом, как мы сказали уже выше, в вопросах этого рода maximum должен иметь интеграл некоторого неинтегрируемого диференциального выражения, и речь идет об определении соотношения, которое должно существовать между переменными для того, чтобы это условие удовлетворялось.

97. Однако основной принцип остается здесь тем же, что и для обыкновенных задач на maxima и minima, т. е. состоит в том, что когда количество, которое должно стать, например, maximum, достигло этого предела, то оно не может более увеличиваться.

Приближаясь к этому пределу, оно увеличивается все меньше и меньше до тех пор, пока его не достигнет; тогда оно становится как бы неподвижным, для того чтобы начать затем нечувствительно уменьшаться; так что в этом состоянии максимума количество может быть рассматриваемо как постоянное или имеющее диференциалом нуль, хотя те переменные количества, функцией которых оно является, и не таковы. Следовательно, если форма кривой при переходе в положение $AM'N'D$ изменяется бесконечно мало и если обозначить новые координаты через x', y', то площадь $\int y'\,dx'$ можно считать равной $\int y\,dx$, или, что то же самое, приращение, которое получает $\int y\,dx$ при переходе в $\int y'\,dx'$, можно считать равным нулю, если только отношение x и y соответствует искомому максимуму. Это приращение и называется *вариацией* $\int y\,dx$.

98. Итак, пусть $AM'N'R'D$ есть какая-нибудь бесконечно мало отличающаяся от первой кривая; если рассматривать эту новую кривую как ту же, только претерпевшую бесконечно малое преобразование, кривую $AMNRD$, то мы сможем считать каждую точку M' преобразованной кривой за точку M другой, перешедшую из M в M', так что каждая точка новой кривой имеет соответствующую ей точку на первой.

Тогда приращение, которое получает при этом изменении каждое из входящих в систему количеств, когда она переходит из первого состояния во второе, называется *вариацией* этого количества. Так, например, вариация MP есть $M'P' - MP$, вариация NQ есть $N'Q' - NQ$; вариация всей кривой есть:

$$AM'N'R'D - AMNRD,$$

вариация ее площади есть:

$$AM'N'R'DKA - AMNRDKA$$

и т. д.

99. Хотя вариация количества и есть разность двух бесконечно мало отличных значений этого количества, но не следует смешивать ее с его диференциалом; последний является разностью двух последовательных значений, взятых на одной и той же кривой, в то время как вариация есть разность двух значений, взятых при переходе от одной кривой к другой; так, например, диференциал абсциссы есть $AQ - AP$, между тем как ее вариация есть $AP' - AP$; диференциал ординаты есть $NQ - MP$, между тем как ее вариация есть $M'P' - MP$, и т. д.

Чтобы не смешивать эти две разности, новую, т. е. вариацию, обозначают характеристикой δ, между тем как диференциал имеет характеристику d. Таким образом $PQ = dx$, тогда как $PP' = \delta x$; $NQ - MP = dy$, тогда как $M'P' - MP = \delta y$, и т. д.

Когда переходят от точки M к точке N на первой кривой, то на второй переходят от точки M' к N'; таким образом, если PQ будет диференциалом x, т. е. количеством, на которое увеличивается x при переходе от M к N, то $P'Q'$ будет диференциалом AP', т. е. количеством, на которое в то же самое время увеличивается AP' или $x + \delta x$. Точно так же $N'Q' - M'P'$ есть диференциал от $M'P'$ или же от $y + \delta y$.

100. Вариации, как и диференциалы, вводятся в вычисления только в качестве вспомогательных количеств для облегчения открытия соотношения, которое в действительности должно существовать между координатами первой кривой. Следовательно, после введения вариаций необходимо их исключение для того, чтобы осталось только искомое соотношение между координатами; или, если угодно, чтобы сначала оста-

лось соотношение между этими координатами и их диференциалами, которое затем через интегрирование, или как-либо иначе, переходит в соотношение между одними только ординатами и постоянными, составляющими систему означенных количеств.

101. Мы уже видели, что разные операции анализа основываются, вообще, на различных степенях неопределенности, свойственных количествам, которые участвуют в одном каком-либо вычислении. Мы здесь имеем этому новый пример, ибо вариации являются количествами еще более неопределенными, чем диференциалы, которые сами, как мы видели, более неопределенны, чем простые переменные.

В самом деле, когда представляют себе, что природа некоторой кривой начинает бесконечно мало изменяться, то первоначальную кривую всегда рассматривают как некоторый неизменный предел (terme fixe), с которым и сравнивают изменяющуюся кривую. Произведенные малые изменения выражаются посредством вариаций, получаемых координатами и другими количествами системы, и эти вариации можно считать сколь угодно малыми, ничего не изменяя в означенной (désignée) системе, между тем как система, получающаяся при вариации и являющаяся вспомогательной, непрерывно приближается к первой, пока не станет отличаться от нее сколь угодно мало.

Диференциалы подчиняются закону, определяемому соотношением между координатами. Между тем закон, связующий с этими координатами вариации, является произвольным. Отсюда следует, что хотя и диференциалы и вариации являются просто вспомогательными количествами, но последние все же более неопределенны, чем первые, потому что они могли бы изменяться, даже если диференциалы рассматривались бы как неизменные.

102. Если предположить, что x будет одним из

переменных, а x' бесконечно мало отличным количеством, соответствующим ему в новой системе, то $(x'-x)$ будет бесконечно малым количеством, на которое должно увеличиться x, чтобы стать x', и, следовательно, является тем, что мы назвали вариацией от x или δx. Поэтому, чтобы найти вариацию какой-нибудь функции от x, следует, очевидно, только поставить в нее $x+\delta x$ вместо x и затем вычесть из нее первую функцию; этот прием, будучи абсолютно сходным с диференцированием, показывает, что различие между вариацией и диференциалом заключается только в характеристике, которая будет δ для первой и d для второго.

103. Если, — оставляя в стороне характеристики, — правила обоих исчислений одинаковы, то ясно, что вариация dx есть δdx и что, наоборот, диференциал δx есть $d\delta x$.

Но нетрудно заметить, что эти два количества δdx $d\delta x$ одинаковы и отличаются только по форме, т. е. необходимо

$$\delta dx = d\delta x.$$

В самом деле, нам нужно сравнить четыре системы количеств, а именно: 1) систему, соответствующую точке M; 2) систему, которая соответствует точке N и к которой от первой переходят через диференцирование; 3) систему, которая соответствует точке M' и к которой переходят от первой через варьирование; 4) систему, которая соответствует точке N' и к которой приходят либо от второй системы, соответствующей точке N, через варьирование, либо от третьей, соответствующей точке M', через диференцирование.

Но значение переменного, соответствующее первой из этих четырех систем, т. е. системе, означенной по предположению, есть x; значение, соответствующее второй, есть $x+dx$; значение, соот-

ветствующее третьей, есть $x+\delta x$ и, наконец, значение, соответствующее четвертой, будет в зависимости от способа ее получения или

$$(x+dx)+\delta(x+dx),$$

или

$$(x+\delta x)+d(x+\delta x).$$

Таким образом последние два количества выражают одно и то же, именно, значение переменного x в четвертой системе; следовательно, эти два количества равны, т. е.

$$(x+dx)+\delta(x+dx)=(x+\delta x)+d(x+\delta x).$$

Выполняя указанные действия, мы будем иметь:

$$x+dx+\delta x+\delta dx=x+\delta x+dx+d\delta x$$

и, делая приведения,

$$\delta dx=d\delta x.$$

Значит, *вариация диференциала какого-нибудь количества всегда равна диференциалу вариации*; это предложение является одним из основных принципов вариационного исчисления.

104. Другой принцип, вытекающий из первого и также принадлежащий к числу основных, состоит в том, что *вариация интеграла какого-нибудь диференциального выражения равна интегралу вариации*, т. е. что, вообще,

$$\delta\int P=\int\delta P,$$

причем P обозначает какую-нибудь функцию, содержащую диференциал различных переменных, как x, y, z, и сами переменные.

В самом деле, пусть

$$\int P = U;$$

диференцируя, будем иметь:

$$P = dU.$$

Варьируя, получим:

$$\delta P = \delta\, dU,$$

или, согласно вышеуказанному принципу,

$$\delta P = d\, \delta U.$$

Тогда, интегрируя, мы найдем:

$$\int \delta P = \delta U,$$

или, подставляя вместо U его значение:

$$\int \delta P = \delta \int P.$$

105. Допустим, что требуется найти вариацию какого-либо неопределенного интегрального выражения $\int V dx$, т. е. найти $\delta \int V dx$, или, лучше, придать этому выражению такой вид, в котором оно сможет быть освобождено от вспомогательного знака δ, который всегда должно стремиться уничтожить первым.

Согласно второму основному принципу мы будем иметь:

$$\delta \int V\, dx = \int \delta\, (V dx) = \int dx\, \delta\, V + \int V\, \delta\, dx;$$

согласно первому принципу:

$$\delta \int V\, dx = \int dx\, \delta\, V + \int V d\, \delta x. \qquad \text{(A)}$$

Но

$$d\, (V \delta x) = dV\, \delta x + V d\, \delta x.$$

Интегрируя и перенося члены, мы получим:

$$\int V d\,\delta x = V\delta x - \int dV\,\delta x.$$

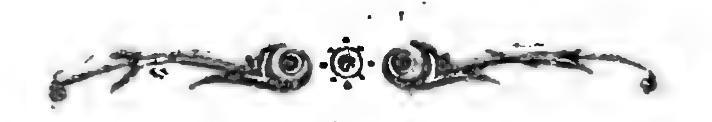
Подставляя это значение $\int V d\,\delta x$ в уравнение (A), мы найдем:

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int dx\,\delta V - \int dV\,\delta x,$$

или

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int dx\,\delta V - dV\,\delta x), \qquad \text{(B)}$$

уравнение, которое можно будет в соответствии с природой функции V освободить от знака вариации δ, что приведет задачу к обычным приемам диференциального и интегрального исчислений.





ГЛАВА ТРЕТЬЯ

О МЕТОДАХ, КОТОРЫМИ МОЖНО ЗАМЕСТИТЬ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

106. Существует несколько способов решения вопросов, находящихся в сфере ведения анализа бесконечно-малых, и хотя ни один среди них не обладает такими, как он, преимуществами, все же интересно узнать, каковы различные взгляды на принципы этой теории. Поэтому я намереваюсь здесь рассмотреть различные родственные анализу бесконечно-малых и даже могущие его заместить методы.

О МЕТОДЕ ИСЧЕРПЫВАНИЯ

107. Методом исчерпывания пользовались в своих трудных исследованиях древние, в особенности в теории кривых линий и поверхностей и при вычислении ограничиваемых ими площадей и объемов. Так как древние допускали только совершенно строгие доказательства, то они не считали возможным

рассматривать кривые как многоугольники с большим числом сторон; но когда они желали установить свойства какой-либо кривой, то они рассматривали ее как некий неизменный предел (terme fixe), к которому непрерывно и сколь угодно приближаются вписанные и описанные многоугольники по мере увеличения числа их сторон. Тем самым они как бы исчерпывали пространство, заключенное между этими многоугольниками и кривой, что, без сомнения, и побудило дать этому методу имя *метода исчерпывания*.

Так как эти многоугольники, ограниченные прямыми линиями, представляли собой известные фигуры, то их непрерывное приближение к кривой давало о последней все более и более отчетливое представление; руководствуясь законом непрерывности, можно было затем вполне точно узнать ее свойства.

Но геометрам было недостаточно узнать и как бы разгадать эти свойства, их надо было подтвердить каким-нибудь неоспоримым способом. Этого они достигали, доказывая, что всякое предположение, отрицающее существование этих самых свойств, необходимо приводит к какому-либо противоречию; поэтому они называли этот способ доказательства *приведением к нелепости*.

108. Так, например, установив сначала, что площади подобных многоугольников относятся, как квадраты их соответственных линий, они заключали, что круги различных радиусов относятся, как квадраты этих радиусов, что составляет второе предложение двенадцатой книги Эвклида. К этому заключению их приводила аналогия с воображаемыми вписанными в эти круги правильными многоугольниками с одинаковым числом сторон. Действительно, так как при сколь угодно большом увеличении числа этих сторон их площади постоянно относятся, как квадраты

радиусов описанных кругов, то, как легко заметили древние, то же самое необходимо должно иметь место и для самих кругов, к которым эти многоугольники все более и более приближаются, пока не будут отличаться от них сколь угодно мало. Но этого было недостаточно; надо было строго доказать, что дело обстоит действительно так, и это они делали, показывая, что всякое обратное предположение необходимо приводит к нелепости.

Таким же путем древние доказывали, что объемы шаров относятся, как кубы их диаметров; что пирамиды одинаковой высоты относятся, как их основания; что конус есть треть цилиндра с тем же основанием и той же высотой.

Для лучшего исследования вопроса древние часто вводили в качестве вспомогательных фигур одновременно вписанные и описанные многоугольники, которые они и сравнивали друг с другом. Тем самым они все более и более замыкали кривую, заключенную между этими прямолинейными фигурами, и легче определяли свойства этой средней величины.

109. Так же поступали они и с кривыми поверхностями и объемами тел. Они воображали их вписанными и описанными около других поверхностей, у которых они увеличивали постепенно число сторон и поясов, замыкая, таким образом, все более и более между ними данную поверхность. Закон непрерывности снова указывал свойства этой средней фигуры, и они поверяли их посредством приведения к нелепости, удостоверяясь путем строгого доказательства, что всякое обратное предположение, безусловно, приводит к какому-либо противоречию.

Именно так Архимед доказал, что боковая поверхность прямого конуса равна площади круга, который имеет радиусом среднюю геометрическую между образующей конуса и радиусом круга основания, что вся

поверхность шара вчетверо больше одного из его больших кругов и что поверхность какого-нибудь его пояса равна окружности большого круга, умноженной на высоту этого пояса.

Посредством того же приведения к нелепости древние распространяли отношения, найденные между соизмеримыми количествами, на количества несоизмеримые. Это учение, конечно, прекрасно и очень ценно, оно отличается совершенной очевидностью и не позволяет упускать из вида преследуемую цель; для древних это был метод открытий; оно и сейчас еще является чрезвычайно полезным, потому что упражняет способность суждения, приучает к строгости доказательств и в зародыше заключает анализ бесконечно-малых. Правда, оно требует некоторого напряжения ума; но разве размышление не является необходимым для всех, кто желает познать законы природы, и не является ли необходимым привыкнуть к нему заранее, лишь бы не посвящалось этому слишком много времени?

110. Внимательно изучая приемы этого метода исчерпывания, можно заметить, что они всегда сводятся к введению вспомогательных количеств при исследовании свойств или соотношений между данными количествами. При этом данные количества рассматриваются как крайние пределы, к которым, по предположению, непрерывно приближаются вспомогательные, а закон непрерывности, которому они следуют при этом приближении, указывает на те видоизменения, путем которых можно перейти от известных свойств вспомогательных количеств к неизвестным дотоле свойствам данных количеств.

Так именно применяют метод исчерпывания к определению свойств кривых, вводя вписанные и описанные многоугольники, образующие вспомогательные системы известных количеств, которые, постепенно прибли-

жаясь к данной кривой, позволяют узнать, благодаря закону непрерывности, которому они следуют при этом приближении, и благодаря своему все усиливающемуся сходству с этой кривой, особенности и свойства этой последней.

111. Таким образом метод исчерпывания преследует ту же цель и руководствуется теми же принципами, что и анализ бесконечно-малых. Это — все та же вспомогательная система известных количеств, с одной стороны, связанная с той, которую хотят узнать, а с другой стороны, остающаяся достаточно произвольной, чтобы ее можно было постепенно сколь угодно приближать к заданной системе, что и позволяет путем индукции определить искомые соотношения. После этого остается лишь установить достоверность этих соотношений, чего и достигают путем приведения к нелепости.

112. Ньютон значительно усовершенствовал это учение посредством своей теории первых и последних отношений, которые как раз и вскрываются (que fait connaître) законом непрерывности при постепенном приближении вспомогательной системы к означенной системе. Благодаря этой новой теории он расширил принципы метода исчерпывания и упростил его приемы, освободив его от свойственной ему ранее необходимости всегда подтверждать точность найденных соотношений посредством приведения к нелепости и доказав, что эти соотношения достаточно хорошо обоснованы самим способом их получения. Именно это и говорит Ньютон, заканчивая изложение этой теории: «Я начал, — говорит он, — с этих лемм для того, чтобы избежать длинных доказательств от противного по методу древних геометров».

Впоследствии этот великий человек сделал второй, еще более крупный шаг вперед в этом учении, преобразовав в исчислении флюксий свой метод первых

и последних отношений в некий систематический алгорифм. Посредством исчисления флюксий он ввел в алгебраический анализ не только эти первые и последние отношения, но и отдельно взятые их члены, т. е. в отдельности числитель и знаменатель представляющей каждое из них дроби. Это нововведение обладает величайшей важностью, ибо оно доставляет новые способы преобразования. К этому мы возвратимся в дальнейшем. Однако слава этого открытия принадлежит не одному только Ньютону; он разделил ее с Лейбницем, который даже получил перед ним преимущество, первым опубликовав свой алгорифм, и который, имея мощную поддержку со стороны других знаменитых математиков, тотчас же усвоивших его метод, подвинул его с их помощью много быстрее вперед, чем это смогло сделать за то же самое время исчисление флюксий.

О методе неделимых

113. Предшественником тех ученых, которым мы обязаны анализом бесконечно-малых, был Кавальери, он проложил им дорогу своей «Геометрией неделимых».

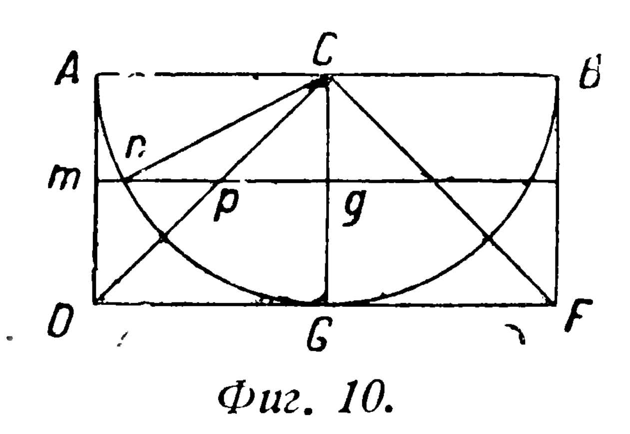
Метод неделимых рассматривает линии как составленные из точек, поверхности—из линий, объемы—из поверхностей.

Эти предположения, конечно, нелепы, и их следует употреблять только с осмотрительностью; но на них нужно смотреть как на средства упрощения, посредством которых во многих случаях быстро и легко получается то, что, строго следуя методу исчерпывания, можно было бы найти только длительным и тяжелым путем.

Если, например, нужно доказать, что две пирамиды с одинаковыми основаниями и одинаковой вы-

сотой одинаковы также и по объему, то их обе рассматривают как составленные из бесконечного множества равноотстоящих друг от друга плоских поверхностей, которые являются их элементами. И так как эти элементы попарно равны, а число их с обеих сторон одинаково, то отсюда заключают, что объемы пирамид, являющиеся соответственными суммами этих элементов, равны между собою.

114. Допустим, что *AB* (фиг. 10) есть диаметр полукруга *AGB*, *ABFD* — описанный прямоугольник, *CG* — радиус, перпендикулярный к *DF*; допустим, что, сверх того, проведены две диагонали *CD*, *CF* и что, наконец, через какую-нибудь точку *m* прямой *AD* проведена прямая *mnpg*, перпендикулярная к *CG*, пересекающая окружность в точке *n* и диагональ *CD* в точке *p*.



Фиг. 10.

Представим себе, что вся фигура вращается около *CG* как оси; тогда четверть круга *ACG* образует полушарие диаметра *AB*; прямоугольник *ADCG* образует описанный прямой цилиндр с тем же диаметром; равнобедренный прямоугольный треугольник *CGD* образует прямой конус, у которого высотой и радиусом основания будут служить равные линии *CG*, *DG*; наконец, три прямые или отрезки прямой *mg*, *ng*, *pg* образуют каждая круг, центр которого находится в точке *g*.

Первый из этих трех кругов будет элементом цилиндра, второй — элементом полушария и третий — конуса.

Далее, так как площади этих кругов относятся между собой, как квадраты их радиусов, а эти три радиуса могут, очевидно, служить гипотенузой и

двумя катетами прямоугольного треугольника, то ясно, что первый из этих кругов равен сумме двух других, т. е. что элемент цилиндра равен сумме элементов, соответствующих полусфере и конусу. Так как то же самое справедливо для всех прочих элементов, то из этого следует, что весь объем цилиндра равен сумме всего объема полушария и всего объема конуса.

Но ведь известно, что объем конуса равен трети объема цилиндра; следовательно, объем полушария равен двум третям этого цилиндра; значит, объем целого шара равен двум третям объема описанного цилиндра, как это и открыл Архимед.

115. Кавальери определенно предупреждает, что его метод есть не что иное, как следствие метода исчерпывания; но он заявляет, что не мог бы дать его строгого доказательства. Великие математики, последовавшие за Кавальери, вскоре уловили сущность его метода; он был среди них в большой славе вплоть до открытия новых исчислений, и они так же мало считались с выставленными тогда против него возражениями, как и братья Бернулли с возражениями, выставленными позднее против анализа бесконечно-малых. Именно этому методу неделимых Паскаль и Роберваль обязаны успехом своих глубоких исследований о циклоиде. Вот что говорит о нем первый из этих знаменитых авторов:

«Я хотел сделать это предупреждение, чтобы показать, что все, что доказано посредством истинных правил о неделимых, доказуемо также строго и способом древних и что, таким образом, один из этих методов отличается от другого только по способу выражения, что не может нисколько смущать разумных людей, раз их предупредили, что̀ под ним разумеется. Поэтому в дальнейшем я буду спокойно пользоваться этим языком неделимых, употребляя

выражения *сумма линий* или *сумма плоскостей*. Я буду спокойно употреблять такое выражение, как *сумма ординат*, которое кажется негеометрическим тем, кто не понимает учения о неделимых и кто считает грехом против геометрии выражать плоскость при посредстве неопределенного (indéfini) числа линий. Но это мнение вызывается только их недостаточным пониманием, потому что под этими словами подразумевается не что иное, как сумма неопределенного числа прямоугольников, образованных каждой ординатой с каждой из равных малых частей диаметра, сумма которых, конечно, есть плоскость. Таким образом когда говорят о *сумме неопределенного множества линий*, то всегда имеют в виду еще некоторую прямую, на равные и неопределенные части которой они умножаются».

«Этого, конечно, более чем достаточно, чтобы понять, что смысл такого рода выражений, как *сумма линий, сумма плоскостей* и т. д., вполне соответствует чистой геометрии».

116. Это место замечательно не только потому, что доказывает, что математики прекрасно умели оценить достоинства метода неделимых, но еще и потому, что оно доказывает, что понятие математической бесконечности в том самом смысле, какое ему приписывают ныне, не было чуждо этим математикам. Действительно, из этой цитаты Паскаля явствует, что он придавал слову *неопределенный* (indéfini) то же значение, какое мы придаем слову *бесконечный* (infini); что он называл просто *малым* то, что мы называем *бесконечно-малым*, и что он без стеснения пренебрегал этими малыми количествами по сравнению с количествами конечными; ведь мы видим, что Паскаль рассматривал трапеции или малые части площади кривой, заключенные между двумя последовательными ординатами, как простые прямоугольники,

пренебрегая малыми смешаннолинейными треугольниками, основаниями которых служат разности этих ординат. Однако никто не решался еще упрекать Паскаля в недостатке строгости.

Роберваль беспрестанно употребляет эти выражения *бесконечное* (infini) и *бесконечно-малое* в том смысле, какой им придают в настоящее время, и формально заявляет, что бесконечно малыми количествами следует пренебрегать по сравнению с конечными количествами, а последними — по сравнению с количествами бесконечными.

Следовательно, уже тогда было известно, что метод неделимых и все возможные аналогичные методы суть не что иное, как упрощающие формулы, весьма полезные для избежания длиннот метода исчерпывания и никоим образом не вредящие точности его результатов.

Последующие математики долгое время пользовались им даже после того, как были изобретены дифференциальное и интегральное исчисления. Поэтому неудивительно, что Лейбниц не позаботился строго доказать принцип, на который, вообще, смотрели как на аксиому. Возражения против этого принципа возникли только тогда, когда он был приведен к алгорифму, как будто бы стало жалко, что научные пути, которыми итти до того было так трудно, сразу были расчищены и сделаны доступными для всех. Эти замечания я закончу одним, двумя примерами.

117. Обыкновенная алгебра показывает, как можно найти сумму какой-нибудь последовательности членов из ряда натуральных чисел; сумму их квадратов; сумму их кубов и т. д. Это обстоятельство дает геометрии неделимых средства вычислить площади многих прямолинейных и криволинейных фигур и объемы многих тел.

Возьмем, например, треугольник; опустим из его

вершины на основание перпендикуляр, разделим этот перпендикуляр на бесконечное множество равных частей и проведем через каждую точку деления прямую, параллельную основанию, концы которой будут находиться на двух сторонах треугольника.

Согласно принципам геометрии неделимых, мы можем рассматривать площадь треугольника как сумму всех параллелей, на которые мы будем смотреть как на ее элементы; далее, согласно свойствам треугольника, эти прямые пропорциональны их расстояниям от вершины; следовательно, так как, по предположению, высота разделена на равные части, то эти параллели возрастают в арифметической прогрессии, первый член которой равен нулю.

Но во всякой арифметической прогрессии, первый член которой есть нуль, сумма всех членов равна последнему, умноженному на половину числа этих членов. В нашем случае сумма членов представляется площадью треугольника, последний член — основанием, а число членов — высотой. Следовательно, площадь всего треугольника равна произведению его основания на половину его высоты.

118. Возьмем пирамиду; опустим перпендикуляр из ее вершины на основание, разделим этот перпендикуляр на бесконечное множество равных частей и через каждую точку деления проведем плоскость, параллельную основанию этой пирамиды.

Согласно принципам геометрии неделимых, пересечение каждой из этих плоскостей и объема пирамиды будет одним из элементов этого объема, а этот последний будет не чем иным, как суммой всех этих элементов.

Но, согласно свойствам пирамиды, эти элементы относятся, как квадраты их расстояний до вершины. Следовательно, обозначая через B основание пирамиды, H — ее высоту, b — какой-нибудь из упомянутых

элементов, h—его расстояние до вершины и V—объем пирамиды, будем иметь:

$$B : b :: H^2 : h^2,$$

и, значит,

$$b = \frac{B}{H^2} h^2.$$

Следовательно, V, который является суммой всех этих элементов, равен постоянному $\frac{B}{H^2}$, умноженному на сумму квадратов h^2; и так как расстояния h возрастают в арифметической прогрессии, первый член которой есть нуль, а последний H, т. е. подобно натуральным числам от 0 до H, то количества h^2 представят их квадраты от 0 до H^2.

Но обыкновенная алгебра учит, что сумма квадратов натуральных чисел от 0 до H^2 включительно равна:

$$\frac{2H^3 + 3H^2 + H}{6}.$$

Так как здесь число H бесконечно, то все члены, следующие в числителе за первым, исчезают по сравнению с ним. Следовательно, эта сумма квадратов сведется к $\frac{1}{3} H^3$.

Умножая затем эту величину на найденное выше постоянное $\frac{B}{H^2}$, мы получим для искомого объема:

$$V = \frac{1}{3} BH,$$

т. е. объем пирамиды равен трети произведения ее основания на ее высоту.

Подобным же путем можно доказать, что, вообще, площадь всякой кривой, уравнение которой

$$y^m = x^n,$$

равна $\frac{m}{m+n}XY$, где Y представляет последнюю ординату, X — соответствующую ей абсциссу, а m и n суть какие-нибудь целые, дробные, положительные или отрицательные показатели.

Таким образом метод неделимых в некоторых отношениях замещает интегральное исчисление; можно считать, что он соответствует интегрированию одночленов, что было, конечно, великим открытием во времена Кавальери.

О методе неопределенных

119. Мне кажется, что Декарт, благодаря своему методу неопределенных, очень близко подошел к анализу бесконечно-малых, или, скорее, мне кажется, что анализ бесконечно-малых есть не что иное, как удачное применение метода неопределенных.

Основной принцип метода неопределенных или неопределенных коэфициентов состоит в том, что если имеется уравнение вида:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0,$$

в котором коэфициенты A, B, C и т. д. являются постоянными, а x — количеством переменным, которое может быть предположено сколь угодно малым, то каждый из этих коэфициентов в отдельности неизбежно равен нулю; или, иначе, что всегда будет:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \text{ и т. д.},$$

каково бы ни было притом число членов этого уравнения.

В самом деле, так как можно предположить x сколь угодно малым, то возможно также сделать сколь

угодно малой и сумму всех членов, содержащих в качестве множителя x, т. е. сумму всех членов, следующих за первым. Следовательно, этот первый член A отличается от 0 сколь угодно мало; но так как A является постоянным, то оно не может отличаться от 0 сколь угодно мало, потому что тогда оно было бы переменным, и, следовательно, оно может быть только 0. Итак, мы уже имеем $A = 0$, и, значит, остается:

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0.$$

Я делю все на x и получаю:

$$B + Cx + Dx^2 + \ldots = 0,$$

откуда находим $B = 0$, в силу того же основания, которое служило для доказательства, что $A = 0$. Аналогичное рассуждение покажет, что равным образом

$$C = 0, \ D = 0 \text{ и т. д.}$$

120. Установив это, возьмем уравнение только с двумя членами:

$$A + Bx = 0,$$

в котором первый член является постоянным, а второй способен сделаться сколь угодно малым; согласно только что сказанному, это уравнение возможно только, если члены A и Bx каждый в отдельности равны нулю.

Следовательно, в качестве основного принципа и непосредственного следствия метода неопределенных мы можем установить, что *если сумма или разность двух условно-предполагаемых (prétendues) количеств равна нулю и если одно из них можно предположить сколь угодно малым, а другое не заключает ни-*

чего произвольного, то эти два условно-предполагаемых количества каждое в отдельности равны нулю.

121. Одного этого принципа достаточно для разрешения при помощи обыкновенной алгебры всех вопросов, подлежащих ведению анализа бесконечно-малых. Соответствующие приемы обоих методов, после надлежащего их упрощения, являются абсолютно одинаковыми; все различие заключается в способе рассмотрения вопроса: количества, которыми *пренебрегают* в одном как бесконечно-малыми, *подразумеваются* в другом, ибо, хотя они и считаются конечными, но доказано, что они должны сами собой исключиться, т. е. уничтожить друг друга в результате вычисления.

В самом деле, легко заметить, что этот результат может быть только уравнением с двумя членами, из которых каждый в отдельности равен нулю, следовательно, можно наперед подразумевать в процессе вычисления все члены, которые относятся к тому из этих двух уравнений, которым не желают пользоваться. Применим эту теорию к нескольким примерам.

122. Вернемся к уже рассмотренному примеру (9). Мы нашли там (фиг. 1):

$$TP + T'T = y\frac{MZ}{RZ} \text{ и } \frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}.$$

Оба эти уравнения совершенно точные, каковы бы ни были значения MZ и RZ. Поэтому, найдя из первого из этих уравнений значение $\frac{MZ}{RZ}$ и подставив во второе, я получу в

$$\frac{TP + T'T}{y} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

точное уравнение, имеющее силу, какое бы расстояние мы ни взяли между линиями RS и MP.

Но легко заметить, что я могу представить это уравнение в следующем виде:

$$\left(\frac{TP}{y}-\frac{y}{a-x}\right)+\left[\frac{T'T}{y}-\frac{yMZ+aRZ-xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right]=0,$$

где первый член содержит только количества данные или определенные условиями задачи, а второй содержит произвольные количества и может быть предположен сколь угодно малым, ничего не изменяя в количествах, содержащихся в первом члене, потому что RS можно считать сколь угодно близким к MP. Следовательно, согласно теории неопределенных, каждый из членов этого уравнения в отдельности должен быть равен нулю. Таким образом это уравнение можно разложить на два других уравнения:

$$\frac{T'P}{y}-\frac{y}{a-x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{T'T}{y}-\frac{yMZ+aRZ-xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}=0,$$

из которых первое содержит только означенные количества, а второе содержит произвольные количества. Но для нас важно только первое, потому что именно оно дает нам искомую величину TP, притом такую, какую мы уже нашли прежде. Следовательно, даже если бы мы допустили в процессе вычислений ошибки, относящиеся, правда, только к последнему уравнению, то точность искомого результата от этого нисколько бы не пострадала; и так в действительности и случилось бы, если бы мы стали рассматривать MZ, RZ и $T'T$ как исчезающие (nulles) в первоначальных уравнениях по сравнению с предложенными количествами a, y, x. Мы бы при этом допустили ошибки в выражении условий задачи,

но эти ошибки уничтожились бы сами собой через компенсацию и не оказали бы никакого действия на ужный нам результат.

123. С этой точки зрения анализ бесконечно-малых представляется не чем иным, как применением или, если угодно, обобщением метода неопределенных: ибо, согласно этому методу, я скажу, что когда бесконечно малым количеством *пренебрегают*, то его, собственно говоря, считают только *подразумевающимся*, а вовсе не предполагают его исчезающим (nulle); например, когда вместо двух точных уравнений

$$TP + T'T = MP \cdot \frac{MZ}{RZ}$$

и

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

найденных в (9), я беру два несовершенных уравнения:

$$TP = MP \cdot \frac{MZ}{RZ} \quad \text{и} \quad \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x},$$

то я прекрасно знаю, что допускаю ошибку, и мысленно, так сказать, я их представляю в таком виде:

$$\frac{MZ}{RZ} \cdot MP = TP + \varphi \quad \text{и} \quad \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x} + \varphi',$$

где φ и φ' как раз такие количества, при которых эти уравнения в точности верны. Точно так же и в уравнении

$$\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a - x},$$

вытекающем из двух вышеприведенных несовершенных

уравнений, я подразумеваю количество φ'' как раз такое, чтобы уравнение

$$\frac{TP}{MR} - \frac{y}{a-x} + \varphi'' = 0$$

было точным. Но я вскоре узнаю, что это последнее количество φ'' равно нулю, потому что если бы оно не уничтожилось, то оно могло бы быть только бесконечно малым, между тем как в первый член не входит никакого бесконечно малого количества; но это невозможно, если только каждый из этих членов в отдельности не будет равен нулю. Отсюда я заключаю, что мы в точности имеем:

$$\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}.$$

Таким образом количества φ, φ', φ'' не опускались как исчезающие (nulles), а просто подразумевались для упрощения вычисления.

124. В качестве второго примера поставим себе целью доказать, что площадь круга равна произведению длины окружности на половину радиуса. Называя через R этот радиус, ω — отношение окружности к этому самому радиусу и, значит, ωR — длину окружности, мы для S — площади круга должны, таким образом, получить:

$$S = \frac{1}{2}\omega R^2.$$

Для этого я впишу в круг правильный многоугольник, а затем буду последовательно удваивать число его сторон до тех пор, пока площадь этого многоугольника не станет сколь угодно мало отличаться от площади круга. Вместе с тем периметр много-

угольника станет сколь угодно мало отличаться от окружности ωR, а апофема — сколь угодно мало от радиуса R. Поэтому площадь S будет сколь угодно мало отличаться от $\frac{1}{2}\omega R^2$, и, следовательно, если мы положим

$$S = \frac{1}{2}\omega R^2 + \varphi,$$

то количество φ, если оно не равно 0, может быть, по крайней мере, предположено сколь угодно малым. Установив это, я представляю уравнение в виде,

$$\left(S - \frac{1}{2}\omega R^2\right) - \varphi = 0,$$

т. е. в виде уравнения с двумя членами, из которых первый не содержит ничего произвольного, а второй, наоборот, можно предположить сколь угодно малым. Поэтому, согласно теории неопределенных, каждый из этих членов в отдельности равен 0, и, значит, мы имеем:

$$S - \frac{1}{2}\omega R^2 = 0, \text{ или } S = \frac{1}{2}\omega R^2,$$

что и требовалось доказать.

125. Допустим теперь, что требуется найти, какое значение надо придать x для того, чтобы его функция $ax - xx$ была maximum.

Максимум, очевидно, имеет место когда при прибавлении к неопределенному x произвольной величины x' соответствующее увеличение данной функции $ax - xx$ сможет быть сделано сколь угодно малым по сравнению с x' при все большем уменьшении последнего.

Если я присоединяю к x количество x', то приращение данной функции будет:

$$a(x + x') - (x + x')^2 - (ax - xx),$$

или после приведения:

$$(a-2x)x'-x'^2.$$

Таким образом отношение этого количества к x' или же

$$a-2x-x'$$

следует предположить сколь угодно малым. Пусть это количество $=\varphi$; тогда мы будем иметь:

$$a-2x-x'=\varphi,$$

или

$$(a-2x)-(x'+\varphi)=0,$$

т. е. уравнение с двумя членами, из которых первый не содержит ничего произвольного, а второй можно предположить сколь угодно малым; поэтому, согласно теории неопределенных, каждый из этих членов в отдельности равен 0. Следовательно, мы имеем:

$$a-2x=0, \text{ или } a=2x,$$

что и требовалось найти.

126. Допустим, что требуется доказать, что две пирамиды с одинаковыми основаниями и одинаковыми высотами равны между собой.

Представим себе, что эти пирамиды разделены на одинаковое число слоев равной высоты. Каждый из этих слоев, очевидно, можно считать составленным из двух частей, из которых одна является призмой с основанием, равным меньшему из тех двух, которые служат границами слоя, а другая будет некоторым вырезком, окружающим эту призму.

Если мы обозначим V и V' объемы обеих пирамид, P и P' — соответственные суммы упомянутых

призм, q и q' — соответственные суммы вырезков, то мы будем иметь:

$$V = P + q, \quad V' = P' + q'.$$

Но ясно, что $P = P'$, следовательно,

$$V - q = V' - q', \text{ или } (V - V') - (q - q') = 0.$$

Но первый член этого уравнения не содержит ничего произвольного, а второй можно предположить сколь угодно малым. Поэтому, согласно теории неопределенных, каждый из этих членов в отдельности равен 0. Следовательно,

$$V - V' = 0, \text{ или } V = V',$$

что и требовалось доказать.

127. Допустим, что требуется найти объем пирамиды с основанием B, а высотой H.

Представим себе, что эта пирамида разделена на бесконечное множество слоев равной толщины; пусть x будет расстояние какого-нибудь из этих слоев от вершины пирамиды, а x' — толщина этого слоя. В пирамиде площади сечений, проведенных параллельно основанию, относятся, как квадраты их расстояний до вершины; поэтому верхнее или меньшее основание слоя, удаленного от вершины на расстояние x, равно $\frac{B}{H^2}x^2$. Следовательно, объем этого слоя, если пренебречь вырезком, равен $\frac{B}{H^2}x^2x'$, и, значит, весь объем пирамиды, если пренебречь вырезками, равен сумме всех таких элементов. Так как x' можно предположить сколь угодно малым, то и каждый вырезок можно предположить сколь угодно малым относительно объема слоя, и, значит, сумма всех

элементов $\frac{B}{H^2}x^2x'$ сколь угодно мало отличается от искомого объема пирамиды. Поэтому, обозначив этот объем через V, мы будем в точности иметь:

$$V = \text{сум. } \frac{B}{H^2} x^2 x' + \varphi,$$

где φ обозначает количество, которое можно считать сколь угодно малым.

Но так как B, H и x' суть постоянные количества, т. е. одинаковые для всех слоев, то ясно, что

$$\text{сум. } \frac{B}{H^2}x^2x'$$

есть то же самое, что и

$$\frac{Bx'^3}{H^2} \text{ сум. } \left(\frac{x}{x'}\right)^2.$$

Но $\frac{x}{x'}$ есть, очевидно, число слоев, заключенных между вершиной и x; следовательно, сумма $\left(\frac{x}{x'}\right)^2$ для всей пирамиды есть сумма квадратов натуральных чисел от 0 до $\frac{H}{x'}$.

Но известно, что этот ряд квадратов натуральных чисел равен:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{2H^3}{x'^3} + \frac{3H^2}{x'^2} + \frac{H}{x'}\right).$$

Подставляя эту сумму в найденное выше уравнение, мы получим:

$$V = \frac{Bx'^3}{6H^2}\left(\frac{2H^3}{x'^3} + \frac{3H^2}{x'^2} + \frac{H}{x'}\right) + \varphi,$$

или, преобразуя и отделяя произвольные члены от остальных:

$$\left(V - \frac{1}{3}BH\right) - \left[\frac{Bx'^3}{6H^2}\left(\frac{3H^2}{x'^2} + \frac{H}{x'}\right) + \varphi\right] = 0,$$

строго точное уравнение с двумя членами, из которых первый содержит только количества означенные или непроизвольные, а второй можно сделать сколь угодно малым. Поэтому каждый из этих членов в отдельности равен нулю; следовательно, из первого мы имеем:

$$V-\frac{1}{3}BH=0, \quad \text{или} \quad V=\frac{1}{3}BH,$$

что и требовалось найти.

Решение, которое мы только что дали, аналогично методу неделимых, или, вернее, это тот же метод неделимых, только ставший строгим, благодаря некоторым легким видоизменениям, внесенным методом неопределенных. Теперь мы применим этот последний к той же задаче, употребляя обозначения анализа бесконечно-малых, чтобы показать, как все эти методы связаны, или, вернее, чтобы показать, что все они представляют собой один и тот же метод, рассматриваемый с различных точек зрения.

Сохраняя прежние буквы, мы можем обозначить элемент пирамиды через dV. Далее, значение этого же элемента, если пренебречь вырезком, выразится через

$$\frac{B}{H^2}x^2\,dx.$$

Следовательно, мы будем в точности иметь:

$$dV=\frac{B}{H^2}x^2\,dx+\varphi,$$

где φ выражает количество, которое можно предположить сколь угодно малым относительно каждого из остальных членов.

Взяв для обеих сторон точную сумму элементов, мы получим строгое уравнение:

$$V=\text{сум.}\,\frac{B}{H^2}x^2\,dx+\text{сум.}\,\varphi. \qquad \text{(A)}$$

Но обыкновенный интеграл

$$\int \frac{B}{H^2} x^2 dx$$

первого члена второй части равен:

$$\frac{B}{3H^2} x^3 + C,$$

где C есть постоянное. Однако точный диференциал этого интеграла не есть

$$\frac{B}{H^2} x^2 dx,$$

а равен:

$$\frac{B}{3H^2}(x + dx)^3 - \frac{B}{3H^2} x^3 = \frac{B}{H^2} x^2 dx + \frac{B}{H^2}\left(x\,dx^2 + \frac{1}{3} dx^3\right),$$

т. е. в точности мы будем иметь:

$$d\left(\frac{B}{3H^2} x^3 + C\right) = \frac{B}{H^2} x^2 dx + \frac{B}{H^2}\left(x\,dx^2 + \frac{1}{3} dx^3\right).$$

Поэтому, взяв для обеих сторон точную сумму, мы будем иметь:

$$\left(\frac{B}{3H^2} x^3 + C\right) = \text{сум.} \frac{B}{H^2} x^2 dx + \text{сум.} \frac{B}{H^2}\left(x dx^2 + \frac{1}{3} dx^3\right),$$

или, перенося члены:

$$\text{сум.} \frac{B}{H^2} x^2 dx = \left(\frac{B}{3H^2} x^3 + C\right) - \text{сум.} \frac{B}{H^2}\left(x\,dx^2 + \frac{1}{3} dx^3\right).$$

Подставляя это в уравнение (А), мы будем в точности иметь:

$$V = \left(\frac{B}{3H^2} x^3 + C\right) - \left[\text{сум.} \frac{B}{H^2}\left(x\,dx^2 + \frac{1}{3} dx^3\right) - \text{сум.}\varphi\right],$$

уравнение, в котором только последний член содержит произвольные количества и может быть предположен сколь угодно малым. Обозначим для краткости этот член φ'. Тогда после перенесения членов уравнение примет вид:

$$\left[V-\left(\frac{B}{3H^2}x^3+C\right)\right]-\varphi'=0.$$

В этом уравнении на основании принципов метода неопределенных каждый член в отдельности равен нулю, что дает:

$$V=\frac{B}{3H^2}x^2+C.$$

Для того чтобы определить C, достаточно положить $x=0$; тогда $V=0$, и следовательно, $C=0$. Поэтому равенство приводится к виду:

$$V=\frac{B}{3H^2}x^3,$$

т. е. объем пирамиды от вершины до высоты x равен $\frac{Bx^3}{3H^2}$.

Для того чтобы получить весь объем пирамиды, нужно положить $x=H$, что даст, наконец:

$$V=\frac{1}{3}BH.$$

128. Это решение, как видно, такое же, какое получится при употреблении приемов анализа бесконечно-малых, если только ничем не пренебрегать. Обыкновенный анализ бесконечно-малых представляет собой только сокращение этих приемов, ибо он лишь пренебрегает количествами φ, φ', находящимися в результате вычислений лишь в том из двух составляю-

щих его уравнений, которое не нужно. Но то, чем анализ бесконечно-малых пренебрегает как бесконечно малыми количествами, то можно для сохранения математической строгости в продолжение всех вычислений просто подразумевать. Таким образом ясно, что метод неопределенных дает строгое доказательство исчислению бесконечно-малых и в то же время дает средство заместить его, если угодно, обыкновенным анализом. Быть может, было бы желательно, чтобы к диференциальному и интегральному исчислениям пришли этим путем; это было бы столь же естественно, как и фактически принятый путь, и вместе с тем предотвратило бы все затруднения.

О методе первых и последних отношений или пределов

129. Метод первых и последних отношений (raisons) или пределов также происходит от метода исчерпывания и, по существу, является только дальнейшим развитием и упрощением этого последнего. Этим полезным усовершенствованием мы обязаны Ньютону, и ознакомиться с этим методом можно по его «Началам»; для нашей же цели здесь достаточно будет дать о нем краткое представление.

Когда предполагается, что два каких-нибудь количества непрерывно приближаются одно к другому, так что их отношение или частное все менее и менее и сколь угодно мало отличается от единицы, то говорят, что эти два количества имеют в качестве *последнего отношения отношение равенства.*

Вообще, если предположить, что различные количества соответственно и одновременно приближаются к другим количествам, принятым за установленные (fixes), покамест нои не станут все одновременно отличаться от них сколь угодно мало, то отношения, существующие между этими установленными коли-

чествами, являются *последними отношениями* тех количеств, которые по предположению соответственно и одновременно приближаются к ним. Сами же установленные количества называются *пределами* или *последними значениями* количеств, которые к ним так приближаются.

Эти последние значения и последние отношения называются также *первыми значениями* и *первыми отношениями* тех количеств, к которым они относятся, смотря по тому, рассматривают ли переменные как приближающиеся или же как удаляющиеся от количеств, принятых за установленные и служащих для них пределами.

130. Эти пределы или количества, принятые за установленные, могут, однако, быть переменными, как, например, координаты кривой, т. е. они могут и не быть данными в условиях вопроса, а определяться только благодаря последующим предположениям, на которых основано исчисление. Так, например, хотя координаты кривой и принадлежат к количествам, называемым переменными, потому что они не находятся в числе данных, но если мне требуется решить какой-нибудь вопрос относительно указанной кривой, например, провести к ней касательную, то для обоснования моих рассуждений и вычислений мне нужно будет начать с установления определенных значений для этих координат, которые я до самого конца вычислений буду рассматривать как установленные. Эти принимаемые за установленные количества, так же как и количества, данные в условиях задачи, принадлежат к тем, которые мы называем пределами.

131. Эти пределы суть как раз те количества, отношение между которыми мы ищем; те же количества, которые, по предположению, постепенно к ним приближаются, суть только вспомогательные количества, которые допускаются лишь для облегчения

выражения условий задачи, но которые не могут оставаться в вычислении и необходимо должны быть исключены для получения искомых результатов. Поэтому они принадлежат к *количествам*, названным нами *неозначенными*, между тем как их пределы или последние значения суть те количества, отношения между которыми желают получить и которые мы называем *количествами означенными*.

Очевидна та аналогия, которая должна существовать между теорией первых или последних отношений и методом бесконечно-малых. То, что в последнем называют бесконечно малыми количествами, есть, очевидно, согласно данному им определению (14), не что иное, как разность какого-нибудь количества и его предела, или, если угодно, количество, предел которого есть 0; а количества, последнее отношение которых есть отношение равенства, суть не что иное, как те, которые в анализе бесконечно-малых называют бесконечно мало отличными друг от друга количествами.

132. Из этого также следует, что понятие бесконечно малого количества не менее ясно, чем понятие предела, потому что оно есть не что иное, как разность этого предела и количества, последним значением которого он является. Разница между тем, что называют собственно методом пределов и методом бесконечно-малых, состоит в том, что в первом из них в вычислениях допускаются, действительно, только самые пределы, являющиеся всегда означенными количествами, в то время как в методе бесконечно-малых допускаются еще неозначенные количества, которые, по предположению, приближаются к ним непрерывно, а также разности этих неозначенных количеств и их пределов. Это обстоятельство дает методу бесконечно-малых больше средств для видоизменения выражений и алгебраических преобразований,

не создавая ни малейшей разницы в строгости приемов обоих методов.

133. Эти свойства метода бесконечно-малых позволяют поднять его на новую и более важную ступень совершенства, а именно, привести его к особому алгорифму. Разности между неозначенными количествами и их пределами выделили (on a distingué) под именем *диференциалов* этих пределов, а упрощения, порождаемые введением этих количеств в вычисление, как раз и дают анализу бесконечно-малых его столь мощные средства.

Тем не менее, хотя метод пределов и ограничивает свои возможности, не желая вводить в исчисление вспомогательные количества, для которых эти пределы являются только последними значениями, но он все же по легкости вычислений значительно превосходит простой метод исчерпываний, потому что он, по крайней мере, свободен от приведения в каждом отдельном случае к нелепости, т. е. от самого утомительного из составляющих метод исчерпывания действий. В методе пределов для обоснования равенства двух каких-либо количеств достаточно доказать, что они оба являются пределами одного и того же третьего количества.

134. Не существует никакой разницы между методом пределов и методом первых и последних отношений; Ньютон не различает их, он безразлично употребляет слова «предел» количества или «последнее значение» этого количества, «предел отношения» двух количеств или «последнее отношение» этих двух количеств. Я указываю на это потому, что есть люди, которые как-то смутно представляют себе, что существует некоторое различие между методом пределов — таким, как его представил Даламбер в статье «Диференциал» в «Энциклопедии»,— и методом первых и последних отношений, как изложил

его Ньютон в «Началах». Это совершенно одно и то же, и Даламбер определенно заявляет в этой статье, что он в ней является только истолкователем Ньютона. Так как этот метод широко известен, то нам достаточно будет привести один пример его применения.

135. Из того, что было сказано (9), ясно, что, хотя $\frac{MZ}{RZ}$ отнюдь не равно $\frac{TP}{MP}$, но первое из этих количеств тем меньше отличается от второго, чем ближе RS к MP. Значит, хотя уравнение

$$\frac{MZ}{RZ}=\frac{TP}{MP}$$

есть уравнение несовершенное, но (обозначая через L предел или последнее значение) уравнение

$$L\frac{MZ}{RZ}=\frac{TP}{MP}$$

есть уравнение совершенное или строго точное.

Точно так же можно доказать, что уравнение

$$L\frac{MZ}{RZ}=\frac{y}{a-x}$$

также совершенное или строго точное. Поэтому, приравнивая эти два значения $L\frac{MZ}{RZ}$, мы получим, как и выше:

$$\frac{TP}{MP}=\frac{y}{a-x},$$

или

$$TP=\frac{y^2}{a-x}.$$

Таким образом в этом новом исчислении уже не входят ни бесконечно-малые MZ и RZ в отдельности,

ни даже их отношение $\frac{MZ}{RZ}$, а только его предел или последнее значение $L\frac{MZ}{RZ}$, являющееся конечным количеством.

Если бы этот метод было всегда так же легко употреблять, как и обыкновенный анализ бесконечно-малых, то он мог бы казаться предпочтительным, потому что тогда он обладал бы тем преимуществом, что приводил бы прямым и всегда ясным путем к тем же самым результатам.

Но надо сказать, как мы это уже заметили выше, что методу пределов свойственно одно серьезное затруднение, не имеющее места в анализе бесконечно-малых; именно, в нем нельзя, как в этом последнем, отделять бесконечно малые количества друг от друга, и так как эти количества в нем всегда связаны друг с другом, то невозможно ни использовать при вычислениях (combinaisons) свойства, принадлежащие каждому из них в отдельности, ни подвергать уравнения, в которых они встречаются, преобразованиям, способствующим их исключению.

О методе флюксий

136. Ньютон рассматривает кривую как образованную равномерным движением точки и в каждый момент он разлагает постоянную скорость этой точки на две других, одну — параллельную оси абсцисс, а другую — параллельную оси ординат. Эти скорости он называет флюксиями этих координат, между тем как произвольная скорость точки, описывающей кривую, есть флюксия описанной дуги.

Наоборот, описываемая дуга называется флюентой скорости, с которой она была описана движущейся точкой; соответствующая абсцисса называется

флюентой скорости этой точки по направлению этой абсциссы, а ордината называется флюентой скорости этой точки по направлению этой ординаты.

Так как флюксия дуги предполагается постоянной, то очевидно, что если только путь описывающей точки не является прямой линией, то флюксии абсциссы и ординаты будут переменными и что их соотношение в каждый момент будет зависеть от природы кривой, т. е. от самого отношения этих координат.

Обратно, отношение между координатами необходимым образом зависит от отношения, существующего в *каждый момент между флюксиями этих координат*. Поэтому можно спросить, каким способом находится отношение между флюксиями, когда известно отношение между координатами, и, наоборот, как найти отношение между координатами, когда известно отношение между одними лишь флюксиями или же между флюксиями вместе с их координатами. Способ решения первой части этой проблемы называется методом флюксий, а второй — обратным методом флюксий.

137. Эти начальные понятия могут быть обобщены, потому что, по мере того как описывающая точка пробегает кривую, изменяются не только абсцисса и ордината, но и подкасательная, нормаль, радиус кривизны и т. д., т. е. эти количества, так же как и самые координаты, более или менее быстро возрастают или убывают. Следовательно, все эти количества имеют флюксии, отношения которых также определяются движением точки, равномерно описывающей кривую; и значит, сами эти количества суть флюенты. Искусство определять отношения между всеми этими флюентами посредством введения флюксий, употребляемых в качестве вспомогательных величин, и называют прямым и обратным методом флюксий или методом флюксий и флюент.

Этот метод находит себе применение не только к кривым линиям, но по аналогии его распространяют на площади, ограничиваемые этими кривыми, на кривые поверхности и на ограничиваемые ими объемы, на силы, приводящие в движение тела, и на производимые ими действия; одним словом, эту теорию также применяют ко всему, что составляет предмет математики и физико-математических наук, как и сам метод исчерпывания и все вытекающие из него способы исчисления.

138. Ясно, что метод флюксий допускает в вычисления только конечные количества, ибо флюксии суть не что иное, как скорости, которые являются конечными количествами. Скорости, с которыми возрастают координаты, можно также принять за координаты новой кривой, которые будут, в свою очередь, иметь флюксии, подобным же образом являющиеся конечными величинами; эти последние снова могут быть приняты за координаты третьей кривой и т. д., причем в вычисления будут всегда входить только конечные величины.

139. Существует одна основная флюксия, которую выбирают произвольно, но которая, будучи раз выбрана, определяет собой (régle) все другие. Ее можно выбрать какой угодно. Мы предположили, что это была абсолютная скорость описывающей кривую точки, которую мы считали равномерной; но можно также предположить, что это скорость—в направлении абсциссы, или какая-нибудь другая скорость, являющаяся равномерной и служащая термином сравнения (terme de comparaison).

140. Метод флюксий и флюент, естественно, вытекает из метода первых и последних отношений. Действительно, переменная скорость точки не есть частное от деления пути, пройденного этой точкой в некоторое время, на это время, а есть первое или

последнее отношение названного частного, т. е. количество, к которому это частное приближается все больше и больше по мере того, как это время предполагается более кратким.

141. Это обстоятельство послужило поводом к возражению против метода флюксий; действительно, указывали, что это означает введение в геометрию, которая принадлежит к чистой математике, понятия скоростей, принадлежащего только к прикладной математике, и определение идеи, которая должна быть простой, при посредстве другой, являющейся сложной.

Однако это возражение недостаточно основательно. По существу важно узнать, легче ли изложить теорию одним способом или другим. Наша классификация наук в достаточной мере произвольна. Мы помещаем математику впереди механики, исходя из степени простоты, но высшие разделы первой гораздо более абстрактны, чем элементарные отделы второй. И так как, по словам Лагранжа, каждый «имеет или думает, что имеет ясное представление о скорости», то определять флюксии посредством скоростей вовсе не значит итти в направлении, противном духу математики.

142. Мы только что видели, что скорости, которые называются *флюксиями*, суть последние отношения проходимых пространств и употребляемых для их прохождения времен. Но если сравнить две таких скорости или флюксии, например флюксию абсциссы с флюксией ординаты, то между этими флюксиями также будет существовать отношение (raison), которое есть не что иное, как предел частного (rapport) диференциалов этих координат. Таким образом ясно, что и метод флюксий есть тот же метод бесконечно-малых и, следовательно, метод исчерпывания, рассматриваемый с новой точки зрения; и легко заметить связь, соединяющую все эти методы друг с другом.

143. Приемы метода флюксий отличаются от приемов анализа бесконечно-малых только в обозначениях. Вместо характеристики d, которой пользуются в последнем, в методе флюксий буквы пунктируют, т. е., например, флюксия переменного или флюенты x обозначается через $\dot{x}$, и при этом существует то отличие, что $\dot{x}$ обозначает конечное количество, т. е. скорость описывающей точки в направлении абсцисс, между тем как dx в диференциальном исчислении обозначает бесконечно малое количество, являющееся мгновенным приращением этой абсциссы.

Точно так же, если представить себе новую кривую, координаты которой суть соответственно флюксии $\dot{x}$ и $\dot{y}$, то флюксии этих новых координат будут флюксиями флюксий и должны быть, согласно указанному обозначению, в исчислении выражены через $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, причем эти $\ddot{x}, \ddot{y}$ будут снова количествами конечными, тогда как вторые диференциалы ddx, ddy, соответствующие им в методе бесконечно-малых, суть бесконечно малые количества второго порядка; и т. д.

144. Я не намерен высказываться по поводу спора о приоритете открытия между Ньютоном и Лейбницем. На мой взгляд, философская сущность (la métaphysique) каждого из этих методов настолько отлична от философской сущности другого, что более чем вероятно, что каждый из них сам изобрел свой метод. История математики изобилует подобными совпадениями, потому что раз истина едина, то поневоле всегда приходишь именно к ней, и лишь только появляется предчувствие истины, как каждый бросается к ней той дорогой, которую он себе проложил. Нужно заметить, что в эпоху Ньютона и Лейбница идеи, аналогичные идеям этих двух великих ученых, во множестве встречались со всех сторон в произведениях ученых. Это был, действительно, зрелый плод. Кавальери, Ферма, Паскаль ввели в исчисление бесконечно

малые величины; Декарт открыл метод неопределенных; Роберваль придумал разлагать скорость описывающей кривую точки на две других, параллельных обеим координатам; Барроу рассматривал кривые как многоугольники с бесконечным множеством сторон; Валлис научил производить вычисления над рядами. Оставалось только все эти однородные открытия преобразовать посредством алгорифма в однообразный метод; и не представляется ли более естественным думать, что Ньютон и Лейбниц сделали свои открытия каждый сам по себе весьма различными способами, чем предполагать, что один из этих двух уже тогда справедливо знаменитых в других отношениях людей, совершил плагиат у другого?

Об исчислении исчезающих количеств

145. Большинство ученых, для того чтобы примирить простоту лейбницевского обозначения с математической строгостью, предпочитает рассматривать бесконечно малые количества как абсолютно нулевые (absolument nulles).

С этой точки зрения философия исчисления бесконечно-малых с большою ясностью изложена в предисловии к «Диференциальному исчислению» Эйлера.

«Диференциальное исчисление, — говорит этот великий математик, — есть метод определения отношения исчезающих (évanouissantes) приращений, которые получают какие-либо функции, когда дают исчезающее приращение переменному количеству, от которого они зависят».

Уже Ньютон ввел в своих «Началах» понятие исчезающих количеств.

«Под последним отношением исчезающих количеств нужно, — говорит он, — понимать их отношение не

до и не после их исчезновения, но отношение, с которым они исчезают».

Даламбер отвергает это толкование, хотя он полностью принимает учение Ньютона о пределах или первых и последних отношениях количеств.

«Этот метод, — говорит Лагранж, — обладает тем большим неудобством, что рассматривает количества в том состоянии, когда они, так сказать, перестают быть количествами; потому что, хотя всегда легко представить себе отношение двух остающихся конечными количеств, но это отношение перестает быть для разума ясной и точной идеей, как только оба его члена одновременно становятся нулями».

Однако, так как бесконечно малые количества являются переменными, то, повидимому, ничто не мешает приписать им значение 0, как и всякое другое. Правда, тогда их отношение есть $\frac{0}{0}$, что можно положить одинаково равным a или b, а также и всякому другому количеству.

146. Поэтому рассмотрение таких исчезающих количеств было бы почти бесполезно, если бы в исчислении их принимали просто за нули (quantités simplement nulles), потому что они тогда давали бы только отношение $\frac{0}{0}$, которое так же равно 2, как и 3 или как всякому другому количеству. Но не следует упускать из виду, что эти нулевые количества в качестве последних значений количеств неопределенно (indéfiniment) убывающих, для которых они являются пределами, обладают здесь особыми свойствами и что им дано особое наименование «исчезающих» только для того, чтобы отметить, что изо всех отношений (rapports) или зависимостей (relations), которые они могут иметь как нулевые количества, рассматривают и вводят в вычисления только те, которые

определяются законом непрерывности, когда воображают, что система вспомогательных количеств постепенно и незаметно приближается к системе количеств означенных. Это, именно, и имеет в виду Ньютон, когда говорит, что количества исчезающие он рассматривает не прежде их исчезновения и не после него, а в самый момент исчезновения.

Так, например, в рассмотренном выше (9) случае, пока RS не совпадает с MP, дробь $\frac{MZ}{RZ}$ больше $\frac{TP}{y}$; эти две дроби становятся равными только в тот момент, когда MZ и RZ приводятся к нулю. Правда, тогда $\frac{MZ}{RZ}$ будет так же равно всякому другому количеству, как и количеству $\frac{TP}{y}$, потому что $\frac{0}{0}$ есть количество абсолютно произвольное; но среди различных значений, которые можно приписать $\frac{MZ}{RZ}$, $\frac{TP}{y}$ есть единственное подчиненное и определяемое законом непрерывности. Действительно, если построить кривую, абсцисса которой была бы неопределенно малым количеством MZ, а ордината пропорциональна $\frac{MZ}{RZ}$, то ордината, соответствующая нулевой абсциссе, была бы представлена через $\frac{TP}{y}$, а не через произвольное количество, — это, именно, и отличает количества, которые я называю исчезающими, от тех, которые я называю просто нулевыми.

Таким образом, хотя вообще

$$0 = 2 \times 0 = 3 \times 0 = 4 \times 0 = \text{ и т. д.},$$

но об исчезающем количестве, подобном MZ, нельзя сказать, что

$$MZ = 2MZ = 3MZ = 4MZ = \text{ и т. д.},$$

потому что закон непрерывности не может дать для MZ и MZ иного отношения (rapport), чем равенство, и иной зависимости (relation), чем тождество.

147. Мы видели, что, вводя в вычисления неопределенно малые количества и пренебрегая ими по сравнению с количествами конечными, мы делали уравнения несовершенными и что получавшиеся при этом ошибки компенсировались только в искомом результате. Этого неудобства можно, если угодно, теперь избежать при посредстве исчезающих количеств, которые, будучи не чем иным, как последними значениями соответствующих неопределенно малых количеств, могут быть приписаны этим неопределенно малым количествам подобно всяким другим значениям и которыми, с другой стороны, как абсолютно нулевыми, можно пренебречь, не нарушая полной строгости вычислений, когда они прибавляются к каким-нибудь действительным (effectives) количествам.

148. Таким образом анализ бесконечно-малых можно рассматривать с двух различных точек зрения, рассматривая бесконечно малые количества либо как действительные (effectives), либо как абсолютно нулевые. В первом случае анализ бесконечно-малых есть не что иное, как исчисление компенсирующихся ошибок; во втором — это искусство сравнивать исчезающие количества между собой и с другими количествами, для того чтобы извлечь из этих сравнений отношения и зависимости, существующие между заданными количествами.

Когда эти исчезающие количества прибавляются или отнимаются от какого-нибудь действительного количества, то ими, как равными нулю, должно при вычислениях пренебречь; однако, как мы видели, между ними, тем не менее, существуют весьма интересные отношения, определяющиеся законом непрерыв-

ности, которому подчиняется в своем изменении система вспомогательных количеств. Легко заметить, что для того, чтобы представить себе этот закон непрерывности, нужно рассматривать количества, о которых идет речь, на некотором расстоянии от предельного положения (terme), в котором они всецело уничтожаются, ибо иначе они дали бы только неопределенное отношение нуля к нулю; но расстояние это произвольно и необходимо только для того, чтобы облегчить суждение об отношениях, существующих между этими исчезающими количествами. Именно, эти отношения и имеются в виду, когда количества бесконечно малые рассматривают как абсолютно нулевые, а вовсе не те отношения, которые существуют между количествами, не достигшими еще предела (terme) своего уничтожения. Эти количества, названные мной неопределенно малыми, отнюдь не предназначены для того, чтобы вводить их в вычисления, рассматриваемые с интересующей нас сейчас точки зрения, и употребляются они только в помощь воображению и для указания закона непрерывности, определяющего какие-либо отношения и зависимости исчезающих количеств, которым они соответствуют.

Таким образом, хотя, согласно этому предположению, в пропорции $MZ:RZ::TP:MP$ (фиг. 1) количества, обозначенные через MZ и RZ, предполагаются абсолютно равными нулю, но так как необходимо найти их отношение, то, чтобы заметить его равенство с отношением $\frac{TP}{MP}$, приходится рассмотреть соответствующие этим нулевым количествам неопределенно малые количества, — не для того, чтобы ввести их самих в вычисление, а для того, чтобы ввести в него под наименованием MZ и RZ исчезающие количества, являющиеся их последними значениями.

149. Таким образом эти выражения MZ и RZ пред-

ставляют между собой здесь количества нулевые и их употребляют в виде MZ, RZ, а не в общем виде 0, только потому, что если бы их на деле употребляли в последнем виде в тех действиях, в которых они встречаются вместе, то мы не могли бы уже различать их разного происхождения, т. е. не могли бы различать, каковы соответствующие им разные неопределенно малые количества. А для того чтобы уловить закон непрерывности, определяющий искомое отношение тех исчезающих количеств, которые им служат пределами, необходимо хотя бы мысленное рассмотрение этих неопределенно малых количеств; следовательно, существенно важно не терять их из вида и обозначить их так, чтобы их нельзя было смешать.

150. Исчезающие количества, составляющие предмет рассматриваемого с этой точки зрения исчисления бесконечно-малых, являются, по существу, фикциями (êtres de raison), но это не мешает им иметь математические свойства и не мешает также сравнивать их, как сравнивают столь же мало существующие мнимые количества. Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы и гиероглифы нелепых (absurdes) количеств; тем более, невозможно отвергнуть исчезающие количества, которые, по крайней мере, суть пределы действительных количеств и, так сказать, соприкасаются с бытием (touchent à l'éxistence). Не все ли равно, в самом деле, будут ли эти количества химерическими, или нет, раз их отношения не таковы, и раз нас интересуют только эти отношения? Таким образом всецело в нашей власти при вычислениях с количествами, которые мы назвали бесконечно малыми, рассматривать эти количества как действительные или как абсолютно нулевые; разница между этими двумя концепциями состоит

в том, что, если принимать эти количества за нулевые, то различные предложения, уравнения и результаты остаются точными и строгими в продолжение всего вычисления, но относятся к фиктивным количествам и выражают отношения, существующие между количествами, которые сами по себе не существуют; если же рассматривают бесконечно малые количества как нечто действительное (quelque chose d'effectif), то различные предложения, уравнения и результаты хотя имеют дело с истинными количествами, но зато являются ложными, или, вернее, несовершенными и становятся в конце концов точными благодаря компенсации их ошибок, компенсации, являющейся, однако, необходимым и неизбежным следствием действий этого вычисления.

151. Изложенная метафизика вопроса легко дает ответы на все возражения против анализа бесконечно-малых, принцип которого многие математики считали ошибочным и способным ввести в заблуждения. Эти математики были только, если можно так выразиться, подавлены массой чудес и блеском истин, в изобилии вытекавших из этого принципа.

Эти возражения можно свести к следующему: количества, называемые бесконечно малыми, или являются абсолютно нулевыми или нет, потому что смешно предполагать, что существуют какие-то сущности (des êtres), промежуточные между количеством и нулем. Но если они абсолютно нулевые количества, то их сравнение не приведет ни к чему, потому что отношение 0 к 0 так же равно a, как и b и как всякому другому количеству; если же они суть количества действительные, то их нельзя без ошибки считать нулевыми, как это предписывают правила анализа бесконечно-малых.

Ответ прост: в противоположность мнению, будто бесконечно малые количества нельзя рассматривать

ни как нечто реальное, ни как ничто (rien), их на деле, наоборот, можно, по желанию, принимать и за нулевые и за истинные (véritables) количества. Те, кто желает рассматривать их как нулевые количества, могут ответить, что то, что они называют количествами бесконечно малыми, вовсе не произвольные нулевые количества, а нулевые количества, определяемые законом непрерывности, который устанавливает их отношение; что среди всех отношений, которые эти количества способны иметь в качестве нулей, они рассматривают только те, которые определены законом непрерывности; и что, наконец, эти отношения отнюдь не являются неопределенными и произвольными, потому что, например, закон непрерывности отнюдь не дает нескольких различных отношений для исчезающих диференциалов абсциссы и ординаты какой-нибудь кривой, а только одно единственное, являющееся отношением подкасательной к ординате. С другой стороны, те, кто рассматривает бесконечно малые количества как истинные количества, могут ответить, что то, что они называют бесконечно-малым, есть только произвольная величина, которую можно предположить сколь угодно малой, ничего не изменяя в предложенных количествах; что вследствие этого, не считая ее нулевой, с ней все же можно поступать как с таковой, не вызывая этим какой-либо ошибки в результате, потому что эта ошибка, если бы она существовала, была бы произвольна, как и породившее ее количество. Но очевидно, что подобная ошибка может существовать только у количеств, из которых, по крайней мере, одно является произвольным. Следовательно, если достигли результата, который не содержит произвольных количеств и который выражает какое-нибудь соотношение между количествами данными и количествами, определенными условиями задачи, то можно

утверждать, что этот результат является точным и что, следовательно, ошибки, которые должны были быть допущены при выражении этих условий, компенсировались и исчезли благодаря необходимой и неизбежной последовательности действий этого вычисления.

152. Другие математики, вероятно, смущенные возражением, которое мы только что обсуждали, решили просто доказать, что метод пределов, приемы которого являются во всем строго точными, необходимо приводит к тем же результатам, что и анализ бесконечно-малых. Но, соглашаясь с тем, что принцип этого метода является весьма ясным, все же нельзя скрыть от себя, что эти математики пытаются обойти затруднение, не разрешив его; что, далее, метод пределов приводит к результатам анализа бесконечно-малых только трудным и окольным путем; и что, наконец, этот метод не только не совпадает с методом исчисления бесконечного (calcul de l'infini), но, наоборот, служит лишь способом обойтись без него и заменить его обыкновенным алгебраическим вычислением, — в чем, как это мне кажется, проще всего преуспеть, пользуясь методом неопределенных.

153. Из сказанного следует, что бесконечно малые количества можно по желанию рассматривать или как абсолютно нулевые или как истинные количества. Однако одно обстоятельство заставляет меня отдать предпочтение именно последней точке зрения на анализ бесконечно-малых. Мне кажется, что те, кто смотрят на него указанным образом, трактуют вопрос более общим способом, чем другие. Действительно, приписывая бесконечно малым количествам значение нуля, последние совершают бесполезное действие; они, повидимому, считают это определение значения необходимым и думают, что без него они не смогли бы добиться желанных результатов; но это не так, потому что все эти количества могут исключиться безо вся-

ких условий, т. е. без того, чтобы им надо было приписать какое-нибудь определенное значение и в частности нуль, предпочтительно перед всеми другими. Поэтому вопрос мне кажется разрешенным более общим способом, если оставить неопределенными те количества, которые нет никакой нужды определять.

О теории аналитических функций или производных функций

154. Ни один из употреблявшихся или предложенных до настоящего дня для замены метода исчерпывания древних и приведения его к правильному алгорифму методов не соединял для Лагранжа, в желательной степени, требуемых математикой точности и простоты. Тем не менее, он думал, что достичь этой важной цели не невозможно, и изыскания его в этом направлении дали нам великое произведение, которое он опубликовал под заглавием «Теория аналитических функций, содержащая принципы диференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно-малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных количеств». Сверх того, по тому же самому предмету Лагранж дал другое замечательное произведение, озаглавленное «Лекции об исчислении функций», которое является комментарием и дополнением к первому.

Эти произведения носят печать оригинального и глубокого ума, которому мы уже ранее обязаны были «Вариационным исчислением» и «Аналитической механикой»; но так как они, несомненно, находятся на руках у всех, кто желает основательно изучить математику, то я скажу здесь о них лишь несколько слов.

Для того чтобы сохранить на всем протяжении

своих действий строгую точность, никогда не отступать от которой он считал для себя законом, Лагранж, также употребляющий диференциалы, правда, под другим наименованием и обозначением, рассматривает их как количества конечные и неопределенные. Вследствие этого он не пренебрегает ни одним членом и оперирует своими диференциалами, как это делают в исчислении конечных разностей. Он достигает этого посредством теоремы Тейлора, которую он кладет в основание своего учения и которую он непосредственно доказывает при помощи обыкновенного, анализа, между тем как до него ее доказывали только при помощи самого диференциального исчисления.

Таким образом автор оказывается в состоянии выразить посредством строго точных уравнений условия любого заданного вопроса. Несомненно, что эти уравнения гораздо труднее обосновать, и они гораздо более сложны, чем те, которые получаются путем обыкновенных приемов анализа бесконечно-малых, т. е. когда позволяют себе пренебрегать количествами бесконечно малыми по сравнению с конечными. Но так как и те и другие уравнения должны всегда приводить к одинаковым результатам, то чувствуется, что необходимо должны существовать такие способы упрощения первых, которые приводили бы их ко вторым. Так и происходит на деле: автор посредством ряда остроумных преобразований освобождает свое исчисление от всего того, что его бесполезно загромождает. Таким образом эти уравнения сами собой и без того, чтобы было необходимо пренебречь чем-нибудь в продолжение действий, достигают простоты тех уравнений, которые можно было бы непосредственно получить путем обычных приемов анализа бесконечно-малых.

155. Хотя Лагранж и рассматривает свои диференциалы, как если бы это были конечные разности,

но они обладают одним свойством, существенно их отличающим от этих последних: они, именно, пребывают всегда неопределенными, так что в продолжение всего вычисления их всегда можно сделать сколь угодно малыми, не изменяя значений количеств, соотношение между которыми ищется; а это и дает средства для исключения, отнюдь не имеющиеся у обыкновенного исчисления конечных разностей, в котором эти разности являются установленными (fixes).

156. Легко заметить аналогию, существующую между теорией аналитических функций, теорией обыкновенного исчисления бесконечно-малых и методом неопределенных, о котором мы говорили выше (119). В самом деле, если взять разности не пренебрегая ничем, как это делают в теории аналитических функций по формуле Тейлора, то они окажутся рядами. Но, как замечает сам Лагранж, все задачи, решение которых требует применения диференциального исчисления, зависят исключительно от первого члена каждого из этих рядов, и все методы не имеют иной цели, как выделить, и, так сказать, изолировать этот первый член от остальной части ряда. Обыкновенное диференциальное исчисление непосредственно достигает этого, сразу же пренебрегая всеми другими членами, как если бы они были нулевыми (nuls); в методе неопределенных их только подразумевают, как необходимо взаимно уничтожающиеся в результате вычисления; наконец, в теории функций их заставляют реально входить в выражение условий задачи и, затем, их удаляют посредством различных преобразований, основанных на том, что все эти члены имеют в качестве общего коэфициента приращение переменного, которое можно предполагать сколько угодно малым, между тем как первый член ряда свободен от него. Это, очевидно, приводит к методу неопределенных, благодаря которому получа-

ются уравнения, в которых каждый из членов в отдельности равен нулю.

157. Истинным препятствием к принятию столь ясного метода является новизна алгорифма, ради которого пришлось бы покинуть алгорифм, который освящен давней привычкой и с помощью которого изложены все оригинальные произведения, появившиеся на протяжении столетия. При этом, например, пришлось бы переделать все академические собрания, все сочинения Эйлера и даже самого Лагранжа. Этой мыслью и руководствовался Лагранж, когда он опубликовал новое издание своей «Аналитической механики». Он не пользуется в ней своим алгорифмом. Вот, что говорит он по этому вопросу в предисловии, предпосланном в начале этого произведения:

«Пришлось сохранить обычные обозначения диференциального исчисления, потому что оно соответствует системе бесконечно-малых, принятой в этом трактате. Если хорошо представляешь себе дух этой системы и если убедился в точности ее результатов посредством геометрического метода первых и последних отношений или посредством аналитического метода производных функций, то можно пользоваться бесконечно-малыми как безопасным и удобным для сокращения и упрощения доказательств орудием».

158. Несколько лет назад Джон Ланден, английский ученый математик, сделал небезуспешную попытку свести анализ бесконечно-малых к обыкновенной алгебре. Лагранж, который любит выставлять заслуги других, потому что чувствует себя достаточно богатым собственными открытиями, с похвалой упоминает о Джоне Ландене. Вот что он говорит по этому поводу:

«Для того чтобы предотвратить эти затруднения, один талантливый английский математик, сделавший в области анализа ряд важных открытий, предложил в последнее время заменить метод флюксий, которому до тех пор скрупулезно следовали все английские математики, другим чисто аналитическим методом, похожим на метод диференциалов, но в котором, вместо употребления только бесконечно малых или нулевых разностей переменных количеств, употребляются сначала различные значения этих количеств; эти значения, затем, приравнивают между собой, уничтожив предварительно посредством деления множитель, который равенство делало равным нулю. Благодаря этому способу, действительно, избегают бесконечно малых и исчезающих количеств, но приемы и приложения исчисления являются затруднительными и мало естественными, и следует признать, что этот способ, придавая большую строгость принципам исчисления, влечет за собой утрату его главных преимуществ: простоты метода и легкости действий».

Быть может, сама теория аналитических функций не свободна от некоторых из этих неудобств; впрочем, судить об этом следует тем, кто уже привык ею пользоваться.

Общее заключение

159. Различные методы, представление о которых мы дали в этом сочинении, являются, собственно говоря, только одним методом, рассматриваемым с различных точек зрения. Это все тот же метод исчерпывания древних, более или менее упрощенный, более или менее удачно приспособленный к нуждам исчисления и, наконец, приведенный к регулярному, упорядоченному алгорифму.

Но этот алгорифм очень важен; он служит для метода исчерпывания тем, чем обыкновенная алгебра

служит для чистого синтеза. Древние знали только синтез и метод исчерпывания, который сам является лишь отраслью синтеза; ученые же нового времени с изобретением обыкновенной алгебры и алгорифма бесконечно-малых добились неизмеримых преимуществ. Это — орудие, при помощи которого они сокращают и облегчают работу ума, сводя ее, так сказать, к механической работе. Алгебраические символы не являются только записью мысли, средством ее изображения и закрепления, — нет, они воздействуют на самую мысль, они, до известной степени, направляют ее, и бывает достаточно переместить их на бумаге, согласно известным очень простым правилам, для того чтобы безошибочно достигнуть новых истин.

160. Алгебраические символы дают еще больше: они вводят в вычисления чисто мнимые понятия, фиктивные сущности (êtres), которые не могут ни существовать, ни даже быть понятыми и которые, однако, не теряют от этого своей полезности. Их употребляют вспомогательным образом как термин сравнения (terme de comparaison) для облегчения сопоставления истинных количеств, связь между которыми желают получить, и, затем, их исключают посредством преобразований, представляющих собой, так сказать, чисто механическую работу (ouvrage de la main).

Это удивительное орудие точных наук могло явиться результатом лишь совокупных исканий глубочайших гениев и, может быть, нескольких счастливых случайностей. Но не следует забывать, что это — только орудие, созданное в помощь усилиям воображения, а не для ослабления его энергии; это всегда лишь окольное средство, изобретенное для того, чтобы укрепить слабость нашего разума; его приходится употреблять только поневоле для преодоления трудностей или для обобщения проблем, и было бы злоупотреблением, если бы к нему прибегали без

всякой нужды, как, например, в начальных элементах науки, где оно скорей приведет в замешательство, чем прольет свет истины.

161. Отнюдь не употребляя анализа при обосновании элементарных истин, мы должны освободить их от всего того, что нам мешает узреть их сколь можно отчетливо и распознать ведущий к этому путь. Не доставляют ли нам всегда столько же удовольствия, сколько и неожиданности, те, кому удается помочь нам почти интуитивно узреть результаты, которых прежде достигали лишь путем сложного анализа, — разумеется, если только это делается просто и не увеличивая затруднений?

162. Начала обыкновенной алгебры гораздо менее ясны и менее хорошо обоснованы, чем начала анализа бесконечно-малых в той части, которая отличает его от алгебры[1]; метафизика правила знаков при более глубоком изучении ее обнаруживает, пожалуй, большие трудности, чем метафизика бесконечно малых количеств; это правило никогда не было доказано вполне удовлетворительным образом; и, повидимому, оно даже не может быть доказано достаточно удовлетворительно, а, между тем, оно служит основой всей алгебры. Что же можно выиграть, заменяя анализ бесконечно-малых последней? К тому же приемы алгебры по отношению к предметам, подлежащим ведению анализа, гораздо более сложны, чем приемы последнего.

Аналитическое выражение какого-нибудь предмета никогда не может быть столь же ясным, как непосредственное восприятие самого этого предмета; пользоваться первым — это все равно, что рассматривать в зеркало то, что можно увидеть непосредственно.

[1] См. примечание, помещенное в конце этой книги, потому что оно слишком длинно, чтобы его можно было привести здесь.

Аналитическое выражение может быть осложнено мнимыми понятиями (formes imaginaires) или же приводить к невыполнимым действиям: определять чувственный предмет посредством подобных выражений — это значит не только без пользы употреблять окольное средство, но это значит представлять нечто само по себе ясное посредством гораздо менее ясного символа. В связи с этим я приведу одно замечательное место из Эйлера, аналиста par excellence последнего столетия («Мемуары Берлинской академии», год 1754).

«Есть люди, — говорит он, — которые утверждают, что геометрия и анализ не требуют особенных рассуждений; они воображают, что правила, которые эти науки нам предписывают, уже заключают в себе необходимые для достижения решений познания и что надо только выполнять действия согласно этим правилам, нисколько не беспокоясь о рассуждениях, на которых эти правила основаны. Будь это мнение обоснованным, оно оказалось бы в противоречии с почти общим убеждением, считающим геометрию и анализ в высшей степени пригодными средствами для развития ума и упражнения способности суждения. Если даже эти люди и знакомы поверхностно с математикой, то, повидимому, они мало занимались решением сколько-нибудь трудных задач; потому что они тогда скоро заметили бы, что одно лишь применение предписанных правил оказывает весьма слабую помощь при решении этого рода задач и что нужно весьма серьезно исследовать все условия задачи и произвести предварительно множество рассуждений, прежде чем приступить к употреблению этих правил, содержащих в себе экстракт (reste) рассуждений, почти не замечаемый нами в процессе вычислений. Эти подготовительные работы, необходимые, прежде чем можно будет прибегнуть к вычислению, весьма часто

требуют более длинного ряда рассуждений, чем какая-либо другая наука; но зато мы здесь обладаем тем великим преимуществом, что можем удостовериться в их справедливости, в то время как в других науках часто приходится ограничиваться мало убедительными рассуждениями. Но даже само вычисление, хотя анализ и предписывает для него правила, везде должно быть подкреплено основательным рассуждением, при отсутствии которого каждое мгновение рискуют впасть в ошибку. Следовательно, математик повсюду находит случай упражнять свой ум посредством рассуждений, которые должны руководить им в решении всех поставленных им себе трудных задач, и если только он не является достаточно осторожным, то рискует допустить ложные решения».

163. Мне кажется, что, как правило, следует всегда выбирать простейший путь, а при одинаковых трудностях — наиболее ясный: ни одно средство не должно быть исключено. Поэтому, возвращаясь к нашей теме, из тех методов, о которых мы говорили, для обычного употребления нужно выбрать тот, который, вообще, ведет к цели самым легким путем, не отвергая, однако, ни одного из других, потому что, во-первых, они представляют сами по себе прекрасные умозрения, а затем потому, что среди них, быть может, нет ни одного, который не мог бы привести к какой-нибудь дотоле не известной истине, или в некоторых случаях дать неожиданный результат или решение более изящное, чем все другие.

164. Но какой же из всех этих методов, имеющих общее начало в методе исчерпывания древних, наиболее выгоден для обычного употребления? На мой взгляд, общепризнано, что это лейбницев анализ.

Труды Декарта, Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Барроу, Роберваля, Валлиса и, в особенности, Ньютона дока-

зывают, что уже давно подошли вплотную к этому великому открытию, когда оно было провозглашено Лейбницем; и я думаю, что каждый из этих знаменитых математиков сделал бы его, если бы только подозревал, что здесь можно совершить великое открытие; иначе говоря, среди них не было ни одного, который не сумел бы привести к алгорифму метод исчерпывания, если бы только ему пришла мысль заняться этим и если бы он предвидел всю плодотворность в будущем этого алгорифма. Быть может, среди различных алгорифмов, созданных столь многочисленными оригинальными умами, нашлись бы и такие, которые добились бы предпочтения пред алгорифмом Лейбница, освещенным для нас как обычаем, так и драгоценными и обширнейшими трудами, изложенными ныне посредством этого алгорифма.

165. Лагранж говорит, что «Ферма можно считать первым творцом новых исчислений.

«Барроу пришла в голову мысль заменить количества, которые должно считать нулями, согласно Ферма, реальными и бесконечно малыми количествами, и в 1674 г. он дал свой метод касательных, в котором он рассматривает кривую как многоугольник с бесконечным множеством сторон. Однако это исчисление представляло собой еще только набросок, ибо применялось лишь к рациональным выражениям.

Поэтому, оставалось только найти простой и общий алгорифм, применимый ко всякого рода выражениям, благодаря которому можно было бы прямо и без предварительных приведений переходить от алгебраических формул к диференциалам. Это и сделал десять лет спустя Лейбниц, Ньютон, повидимому, одновременно или немного раньше пришел к таким же сокращениям вычислений при диференцировании. Но великое достоинство и основное значение новых исчислений состоит в образовании и интегрировании

диференциальных уравнений; мне кажется, что с этой точки зрения слава их изобретения принадлежит почти исключительно Лейбницу и — особенно — братьям Бернулли».

166. Было бы очень трудно теперь покинуть открытый этими знаменитыми математиками путь, приучить себя к новой точке зрения, к новым обозначениям, к новым оборотам речи. Сам Лагранж, как мы уже об этом говорили (157), сознает, что употребительный ныне метод бесконечно-малых есть верное средство для сокращений и упрощений, и он счел своим долгом предпочесть их в новом издании своей «Аналитической механики» тем, которые он сам только что предложил в своей «Теории аналитических функций». Можно поэтому полагать, что он смотрел на это последнее произведение как на сочинение, объединившее с единой точки зрения все множество аналитических приемов (artifices), открытых им в своих работах, и как на случай методически развернуть свой удивительный математический гений.

167. Я несколько раз слышал от этого глубокого мыслителя, что истинный секрет анализа состоит в искусстве владеть теми различными степенями неопределенности, которые присущи количеству. Я всегда был проникнут этой мыслью, и она побудила меня признать метод неопределенных Декарта важнейшим из следствий метода исчерпывания.

В самом деле, мы видим, что во всех отраслях анализа вообще его приемы всегда основываются на различных степенях неопределенности сравниваемых им количеств. Отвлеченное число менее определенно, чем число именованное, потому что последнее означает не только количество, но еще и качество исчисляемого предмета; алгебраические количества более неопределенны, чем отвлеченные числа, потому что они даже не определяют точно количества; среди

алгебраических количеств переменные более неопределенны, чем постоянные, потому что последние считаются установленными (fixes) в продолжение более долгого периода вычислений; количества неконечные более неопределенны, чем простые переменные, потому что их можно изменять даже тогда, когда те уже согласились считать установленными; наконец, вариации более неопределенны, чем простые диференциалы, потому что последние в своем изменении подчиняются данному закону, в то время как закон, по которому изменяют вариации, произволен. Эта шкала различных степеней неопределенности ничем не ограничена, и именно в этом наличии более или менее определенных, более или менее произвольных количеств и состоит плодотворный принцип общего метода неопределенных, счастливым применением которого, по существу, является исчисление бесконечно-малых.

Эти количества, которые, с одной стороны, связаны с условиями вопроса, между тем как, с другой, им можно по желанию приписывать бо̀льшие или меньшие значения, эти, говорю я, в некотором роде, полупроизвольные количества заставляют нас почувствовать необходимость того различия, которое мы установили между количествами означенными и неозначенными. Это различие не совпадает с различием, существующим между постоянными и переменными, ибо количества означенные включают постоянные и переменные, отношение между которыми ищется, или же количества, которые являются только их функциями, т. е. все те количества, которые могут входить в результат вычисления, между тем как количества неозначенные необходимо из него исключены. Поэтому, последние количества могут участвовать только как вспомогательные, они служат только для облегчения выражения условий задачи, после чего все заботы вычисляющего

должны быть направлены на их исключение, которое необходимо во всех случаях и которое, по осуществлении, всегда извещает о том, что вычисление с этого момента теряет свой первоначальный характер исчисления бесконечно-малых и переходит в область обыкновенной алгебры.

168. Метод пределов или первых и последних отношений отнюдь не освобождает от молчаливого, по крайней мере, различения этих означенных и неозначенных количеств, потому что предел количества есть не что иное, как граница, к которой это количество, по предположению, непрерывно приближается, пока не станет отличаться от него сколь угодно мало. Следовательно, этот предел считается установленным и, значит, является количеством означенным, между тем как другое количество, которое может сколь угодно приближаться к этому пределу, остается всегда произвольным или неозначенным и не может входить в результат вычисления.

169. Из этого видно, что понятие предела не более и не менее трудно точно определить, чем понятие бесконечно малого количества и что, следовательно, ошибочно полагать, будто метод пределов является более строгим, чем метод обыкновенного анализа бесконечно-малых. Действительно, для того чтобы строго развить метод пределов, надо предварительно определить, что такое предел; но разность какого-нибудь количества и его предела есть то, что называют или что должно называть количеством бесконечно малым; и, таким образом, не труднее понять одно, чем другое. Значит, если метод пределов является точным в чем нет никаких сомнений, то нет никакого основания, чтобы не был точным анализ бесконечно-малых.

170. Но этот анализ имеет, по сравнению с методом пределов, серьезные преимущества; в методе пре-

делов нельзя по отдельности вводить в вычисление те полупроизвольные количества, которые мы называем неозначенными, в нем даже не допускаются их отношения, а только пределы этих отношений, которые являются количествами означенными. Благодаря этому лишаются тех различных сочетаний и преобразований, которые доставляют анализу бесконечно-малых возможность, которую он себе присваивает и право на присвоение которой он доказывает, — оперировать над этими отдельными вспомогательными количествами, возможность, составляющую одно из главных преимуществ его алгорифма. Анализ бесконечно-малых, следовательно, представляет собой усовершенствование метода пределов, это — более широкое и более смелое применение последнего, однако, отнюдь не менее точное и ясное.

171. Впрочем, вовсе не при изложении принципов можно составить себе представление о преимуществах метода бесконечно-малых над всеми другими. Все они почти одинаково ясны в своих принципах; но их не одинаково легко применять к частным задачам. Главная трудность этих методов заключается в составлении уравнения задачи, что, наоборот, очень легко, вообще говоря, для метода бесконечно-малых. Лишь только отказываются от свободного применения в вычислениях количеств, названных нами бесконечно-малыми, как средства сравнения оказываются суженными; возникает необходимость в искусственных приемах для достижения той же цели, и это затруднение еще гораздо менее ощутительно в алгебраических выражениях (phrases) и различных действиях, чем в предложениях или рассуждениях, которые подготовляют эти действия или заменяют их. Одного примера будет достаточно для того, чтобы почувствовать в этом отношении превосходство метода бесконечно-малых.

Попробуем сформулировать знаменитый принцип возможных скоростей. Вот его изложение в «Аналитической механике» Лагранжа.

«*Если какая-нибудь система, состоящая из сколь угодно многих тел или точек, находящихся каждая под действием некоторых сил, находится в равновесии и если этой системе сообщить какое-либо малое движение, при котором каждая точка пройдет бесконечно малое пространство, которое и выразит ее возможную скорость, то сумма сил, умноженных каждая на пространство, пройденное точкой, где приложена сила, в направлении этой самой силы, будет равна нулю, если считать положительными малые пространства, проходимые в направлении сил, и отрицательными — пространства, проходимые в обратном направлении*».

Я спрашиваю, как смогут те, кто отбрасывает выражения, допущенные в исчислении бесконечно-малых, сформулировать это предложение столь же ясно, как сделали это мы, следуя знаменитому автору «Аналитической механики». Но ведь вся математика, собственно говоря, представляет собой последовательность подобных выражений: следовательно, отказаться от них, это значит обречь себя на длинноты и безвыходные затруднения. Решиться на это можно было бы только из боязни каких-нибудь ошибок в результатах. Но, ведь, все согласны в том, что метод непогрешим в своих результатах.

172. Надо заметить, что в математических изысканиях воображение, естественно, останавливается на самих называемых бесконечно малыми количествах, а не на пределах их отношений. Если меня спрашивают об объеме тела, ограниченного кривой поверхностью, то я, действительно, воображаю этот объем разделенным на большое число слоев или даже частиц. Я

рассматриваю именно эти слои и эти частицы, а не различные возможные между ними отношения, и, еще менее, пределы этих отношений. Мое воображение ищет доступный чувствам предмет; чисто алгебраические формы доставили бы ему лишь нечто неопределенное. Деление объема на слои и частицы дает мне картину, просвещающую ум, направляющую его и облегчающую решение. Каждую из этих частиц я рассматриваю как элемент всего количества, которое я, действительно, считаю суммой всех этих элементов; поэтому я ищу диференциальное выражение, которое должно представлять собой эту частицу, пренебрегая тем, что̀ правила вычисления позволяют мне опустить. Затем, я применяю к этому диференциальному выражению известные формулы интегрального исчисления и, таким образом, без особенного труда я достигаю разрешения задачи, может быть, недоступной всем усилиям метода исчерпывания или всякого другого, в котором нельзя использовать средства сокращения и упрощения, доставляемые методом бесконечно-малых.

173. Бесконечно малые количества можно рассматривать или как подлинные количества или как количества абсолютно нулевые; но мне кажется, что воображение лучше приспособляется к тому методу, который рассматривает предметы как действительные, чем к методу, который рассматривает их как нулевые. Сам закон непрерывности, один только дающий возможность установить в каждом случае значение каждой из дробей $\frac{0}{0}$, которые без этого оставались бы неопределенными, принуждает сравнивать их до того, как они всецело исчезнут. Впрочем, все эти количества должны быть исключены, и этого можно достичь, не приписывая им никакого определенного значения; следовательно по крайней мере излиш-

не предполагать, что они равны нулю; это значит рассматривать вопрос более частным образом (particulariser la question), когда можно без этого обойтись и, следовательно, это значит решать его менее изящно.

174. Важнейшая и, можно сказать, возвышеннейшая заслуга метода бесконечно-малых состоит в объединении легкости обычных приемов простого приближенного вычисления с точностью результатов обыкновенного анализа. Это огромное преимущество было бы потеряно, или, по крайней мере, ослаблено, если бы этот ясный и простой метод, каким нам дал его Лейбниц, пожелали бы под предлогом сохранения большей строгости в продолжение всего вычисления заменить другим, менее естественным, менее удобным, менее согласным с вероятным ходом мыслей творцов. Если этот метод точен в своих результатах, в чем никто теперь не сомневается, если именно к нему постоянно приходится возвращаться в трудных вопросах, с чем, кажется, опять-таки согласны все, то зачем прибегать для его замены к окольным и сложным средствам? Для чего нужно обосновывать его только на индукциях и на согласии его результатов с тем, что дают другие методы, когда его можно обосновать непосредственно и, вообще, может быть, много легче, чем какой-нибудь из этих методов? Возражения, выставлявшиеся против него, все базируются на том ложном предположении, что ошибки, допущенные в течение вычисления, когда в нем пренебрегают бесконечно малыми количествами, сохраняются, хотя и сколь угодно малыми, в результате этого вычисления. Между тем, это не так: исключение уничтожает их всех необходимым образом. И странно, что не узрели в этом обязательном исключении истинного характера неконечных количеств, а также и ответа, ниспровергающего все возражения.

ПРИМЕЧАНИЕ,
ОТНОСЯЩЕЕСЯ К § 162 НАСТОЯЩЕГО СОЧИНЕНИЯ

1. Существует замечательная аналогия между теорией изолированных (isolées) отрицательных количеств и теорией количеств бесконечно-малых, заключающаяся в том, что и те и другие всегда употребляются только вспомогательным образом, и что они необходимо должны исчезать из результатов вычисления для того, чтобы эти результаты были совершенно точными и понятными. До того это лишь более или менее неявные алгебраические выражения (formes), непригодные ни к какому непосредственному применению.

2. Кажется, гораздо труднее врзумительно объяснить, что такое изолированное отрицательное количество, чем понять, что такое бесконечно малое количество, потому что последнее, как мы видели, есть количество действительное, в то время как первое является фиктивным понятием (être de raison), ибо его можно получить лишь путем невыполнимого действия.

3. Утверждать, что изолированное отрицательное количество меньше нуля, это значит облечь математику, которая должна быть наукой прозрачной, в непроницаемый туман и углубиться в лабиринт парадоксов, одних более странных, чем другие. Сказать, что это просто количество, противоположное положительным количествам, это значит ничего не сказать, потому что затем надо будет объяснить, что это за противоположные количества. Прибегать для этого объяснения к новым первоначальным идеям, подобным идеям материи, времени и пространства,—это значит сознаться, что затруднение считается неразрешимым, и породить новые затруднения, потому что, если мне в

качестве примера противоположных количеств приведут движение к востоку и движение к западу, или движение к северу и движение к югу, то я спрошу: что означает движение к северо-востоку, к северо-западу, к юго-юго-западу и т. д., и какими знаками эти количества должны быть снабжены в вычислении?

Прибегать к первоначальным идеям, несомненно, удобно для того, чтобы уклониться от трудностей, но это неправильно с точки зрения философии, если не является неизбежным. Метафизика наук, быть может, и не очень способствует прогрессу методов, но есть люди, для которых она является любимым предметом. Для них я и составил это небольшое сочинение. С таким же успехом можно было бы к числу первоначальных идей отнести понятие математической бесконечности; вычисления, основанные на этом понятии, не стали бы от этого менее пригодными для обычных их применений. Однако, как говорит Даламбер, «эта философия, о которой так много писали, еще более важна и, быть может, еще с большим трудом поддается развитию, чем самые правила этого исчисления».

Мне кажется, что то же самое можно сказать и об изолированных отрицательных количествах; об этом можно судить по тем спорам, предметом коих они были среди знаменитых математиков.

4. В другом месте я развил истинную, как мне казалось, теорию этого рода количеств, и эта теория встретила доброжелательный прием у ученых. Единственное возражение, которое, как мне известно, было по поводу нее сделано, это то, что она может оказаться менее простой на практике, чем общепринятая. Сознаюсь, что это неудобство было бы весьма серьезным, если бы оно существовало. Но так как я думаю, что дело обстоит как раз наоборот, то я

постараюсь возможно кратко изложить здесь эту теорию.

Основной принцип

5. Всякое, найденное при решении уравнения отрицательное значение неизвестного выражает, отвлекаясь от знака этого значения, разность двух других количеств, из которых при выражении условий задачи большее было принято за меньшее, а меньшее — за большее.

Доказательство. Чтобы выразить какую-нибудь задачу посредством уравнений, начинают всегда так, как и в синтезе, т. е. все количества, на которых основывается рассуждение, рассматриваются как абсолютные (absolues). Следовательно, если решение задачи возможно, и если не допущены ложные предположения, то для каждого количества также будет найдено абсолютное значение. Следовательно, если, наоборот, находят только отрицательное или мнимое значения, то можно уже заключить, что, безусловно, условия задачи и предположения, на которых основано вычисление, в чем-либо несовместны.

Для того чтобы узнать, в чем состоят эти допущенные ложные предположения, я назову неизвестное, для которого было найдено отрицательное значение x, и предположу, что это отрицательное значение будет $-p$. Итак, мы нашли $x=-p$, — уравнение, в котором p есть абсолютное количество. Пусть это абсолютное количество $p=m-n$, где m и n также являются абсолютными количествами. Следовательно, мы будем иметь $m>n$. Так как при выражении задачи посредством уравнения x рассматривали как абсолютное количество, то, значит, предполагали также, что и его значение $-p$ является абсолютным количеством, т. е. рассматривали $-(m-n)$ или $(n-m)$ как абсолютное количество. Следовательно, мы пред-

полагали, что $n > m$, между тем как в действительности, как видели выше, наоборот, $m > n$. Следовательно, допущенное ложное предположение состоит в том, что из двух количеств m и n, разностью которых является p, большее m было принято за меньшее, а меньшее — за большее; и так как абсолютное количество p есть не что иное, как найденное для неизвестного значение $-p$, — если отвлечься от его знака, то отсюда следует, что *всякое, найденное при решении уравнения отрицательное значение и т. д.; что и требовалось доказать.*

6. Нельзя, собственно, сказать, что уравнение $x = -p$ ложно, потому что оно точно выражает данные условия и предположения, на которых основано вычисление; но дело в том, что самые эти условия или предположения, противореча друг другу, не позволяют, результату вычисления быть пригодным без изменений. Поэтому нужно установить, какие изменения могут сделать этот результат вразумительным (explicite), не нарушая его точности, т. е. могут освободить его от содержащихся в нем непонятных количеств или от указанных им невыполнимых операций. Для этого приходится внести две поправки: первая состоит в изменении знаков неизвестного в содержащих его алгебраических выражениях так, чтобы его значение в конечном уравнении стало положительным, вторая — в аналогичном изменении условий и предположений, на которых основывалось вычисление так, чтобы алгебраические выражения были точным переводом этих условий и предположений. Правил для этого не существует, как нет их и для выражения задачи посредством уравнений; но при небольшом навыке обыкновенно бывает очень легко заметить, каков должен быть результат этих изменений, и тогда довольствуешься необходимой поправкой в решении, данном конечным уравнением, не проделы-

вая наново всех выкладок. Это называется *брать отрицательные значения в смысле, обратном положительным значениям*, или *брать неизвестное в смысле обратном тому, который приписывали ему при выражении условий задачи.* Новая теория абсолютно ничего не изменяет в старых приемах; она только хочет придать им смысл и доказать их точность.

7. Предположим, например, что, желая узнать размер возможного выигрыша, мы обозначим этот выигрыш через x и допустим, что в качестве конечного уравнения мы нашли:

$$x = -p.$$

Всякий отсюда без колебания заключит, что вместо возможного выигрыша налицо имеется реальный проигрыш, равный p. Но это нужно доказать. Вот как я буду рассуждать, согласно вышеизложенным принципам.

Так как x есть возможный выигрыш, то, если я назову через m состояние игрока после этого выигрыша и n — его состояние перед ним, то задача будет выражена посредством уравнения в том предположении, что

$$x = m - n$$

и, что, следовательно, $m > n$ Но, так как мы нашли

$$x = -p,$$

то, значит, мы предположили также

$$m - n = -p, \text{ или } n - m = p,$$

и так как p есть абсолютное количество, то, значит,

мы предположили, что $n > m$. Следовательно, с одной стороны, мы предположили, что $m > n$, а с другой что $n > m$; следовательно, мы совместно допустили два противоположных предположения.

Но так как n есть состояние игрока до конечного результата, а m — после, то итог вычисления, дающий нам $n > m$, говорит о том, что игрок проиграл, вместо того чтобы выиграть, т. е. о том, что для исправления предположения, на котором было основано вычисление, надо рассматривать x как проигрыш, а не как выигрыш, и чтобы не нарушить благодаря этому точности вычисления, надо одновременно переменить знак, что даст:

$$-x = -p, \text{ или } x = p.$$

8. Это рассуждение можно применить во всяком другом случае, но нет необходимости повторять его каждый раз, так же как нет необходимости повторять доказательство какого-нибудь предложения при каждом его употреблении. Достаточно того, что его можно дать в случае необходимости; точно так же достаточно установить основной принцип, чтобы твердо знать, что более чем бесполезно прибегать к столь странным утверждениям, как, например, утверждение, будто проигрыш есть отрицательный выигрыш. Вовсе не потому, что проигрыш есть отрицательный выигрыш, необходимо было поставить $-x$ вместо x и одновременно переменить слово выигрыш на проигрыш; а только потому, что мы ошиблись при составлении уравнения, называя выигрышем то, что было проигрышем. Поэтому, было необходимо восстановить истинное наименование и в то же время исправить ложное следствие, извлеченное из первого предположения.

Вполне допустимо в беседе сказать, что проигрыш

есть отрицательный выигрыш, потому что в ней допустимы фигуральные выражения, — но они абсолютно непонятны в математике. Предположим, что игроки, сидящие за столом, условились, что десятая часть выигрыша будет положена в кружку для бедных. Разве не стали бы смеяться над тем, кто решился бы в конце игры потребовать 100 экю с кружки под тем предлогом, что, сделав отрицательный выигрыш в 1000 экю, он должен взять обратно из кружки столько, сколько он должен был бы в нее положить, если бы его выигрыш был положительным? Разве ему бы не сказали: «мы все понимаем, что вы потеряли 1000 экю, мы сочувствуем вам в этом, но, тем не менее, ваши 100 экю должны остаться в кружке, ваша речь, совершенно ясно излагающая ваше приключение, не та речь, которой пользуются при счете, При вычислении каждую вещь надо называть по ее имени».

9. Для того чтобы обобщить теперь эту теорию, представим себе какую-нибудь переменную систему количеств. Предположим, что какие-либо отношения или зависимости, существующие между этими количествами, выражены посредством явных (explicites) формул, т. е. таких, которые содержат только абсолютные количества и непосредственно выполнимые действия.

Пусть m и n будут два каких-либо из этих количеств, из которых, по крайней мере, одно предположено переменным, и пусть эти два количества, в силу изменений, которые испытывает система, становятся попеременно каждое большим. Предположим, наконец, что формулы остаются одинаковыми для всех значений, приписываемых количествам m и n. Установив все это, я назову через p переменную разность этих двух количеств m, n, т. е. большее из них минус меньшее. Так как, по предположению,

m, n суть количества абсолютные, и так как они становятся попеременно одно больше другого, то отсюда следует, что количество p будет также всегда количеством абсолютным и что будем иметь то $p=m-n$, то $p=n-m$, в зависимости от того, будет ли $m>n$ или $n>m$.

Обозначим через p' количество p для того случая, когда $m>n$, через p'' для случая, когда $n>m$; тогда все значения p' мы назовем по отношению друг к другу *прямыми* (directes), точно так же как и все значения p'' между собой; но значения p' называются *обратными* (inverses) по отношению к значениям p'', и наоборот. Тем не менее, все эти количества без исключения являются абсолютными количествами, потому что они всегда выражают только большее из двух количеств m и n минус меньшее; но они не могут существовать одновременно и относятся к различным последовательным состояниям системы.

Рассмотрим теперь эту систему в каком-нибудь состоянии и допустим, что в соответствующих формулах находится количество p'. Посмотрим, как можно исключить из них количество p' и ввести вместо него количество p'', обратное по отношению к прежнему.

Я начинаю с подстановки на место p' равного ему количества $(m-n)$, затем я принимаю во внимание, что, по предположению, формулы применимы ко всем значениям, которые должны быть приписаны количествам m и n, могущим становиться попеременно одно больше другого; я могу, поэтому, предположить, что когда система изменяется так, что n становится больше, чем m, то эти формулы между m и n сохранят свою силу. Допустим, что, действительно, $n>m$; тогда $m-n$ становится количеством непонятным; я его выражу в виде $-(n-m)$ и так как мы имеем $(n-m)=p''$, то мы получим $-p''$ для замены $-(n-m)$, которое было поставлено, в свою очередь,

вместо $(m - n)$, заменившего p'. Следовательно, все это сводится непосредственно к замене p' через $-p''$; иначе говоря, следует только везде поставить p; и когда пожелают перейти от одного состояния системы к другому, то надо будет: 1) изменить знак этого абсолютного количества, 2) приписать ему, вместе с тем, значение количества обратного (inverse) по отношению к тому, которое приписывалось сначала. Это действие подобно тому, которое было указано выше в случае выигрыша и проигрыша. Отсюда мы можем вывести следующий общий принцип.

10. Всякий раз, когда желают перейти от одного состояния системы к другому и сделать непосредственно применимыми к этому последнему формулы, бывшие непосредственно применимыми к первому, надо изменить знак тех количеств, которые соответственно обратны друг другу в обоих различных состояниях этой системы.

И обратно.

Если в формулах, непосредственно применимых к какому-нибудь состоянию системы, изменяют знаки одного или нескольких количеств, то видоизмененные таким образом формулы будут уже принадлежать не к тому же состоянию системы, но к другому, в котором количества, у которых изменили знаки, являются обратными по отношению к количествам, соответствующим им в первом состоянии системы.

11. Если не изменять знака количеств, которые в новом состоянии системы обратны по отношению к соответствующим им количествам первой, то очевидно, что при нахождении их значений путем решения уравнений окажется, что эти значения отрицательны, потому что они везде будут иметь при себе знак противоположный тому, который они должны были бы иметь; поэтому-то обыкновенно такое положение

вещей выражают, говоря, что эти количества становятся отрицательными. Но это весьма неподходящее и способное ввести в заблуждение выражение, ибо не сами эти количества становятся отрицательными, но только те значения, которые определяются для них из уравнений. Но эти значения ложны; истинными значениями являются те, которые получаются только после перемены знаков; до того действие является незавершенным, и количества принадлежат к новому состоянию системы по их абсолютным значениям и к прежнему — по полученным им знакам.

Таким образом не надо упускать из виду, что количества, называемые обратными, являются обратными только относительно друг друга в двух разных состояниях одной и той же системы; что это всегда только абсолютные количества, которые оказываются то положительными, то отрицательными в зависимости от тех преобразований, которым подвергают содержащие их уравнения; и что, наконец, ни одно количество не является отрицательным по своей природе, а может быть им только по знаку, который ему временно предшествует в алгебраических выражениях. Знак *плюс* означает сложение, знак *минус* — вычитание и ничего более; всякое другое употребление этих знаков есть лишь результат алгебраического преобразования, который допускается в вычислениях только по индукции.

12. Лишь навык в вычислении приучает немедленно различать количества, которые становятся обратными при переходе от одного состояния системы к другому и которые, следовательно, должны изменять знак, когда хотят сделать непосредственно применимыми ко второму состоянию системы формулы, явно относившиеся только к первому. Известно, например, что когда хотят применить формулы, найденные для косинуса дуги меньшей четверти окружности к косинусу

дуги большей четверти и меньшей трех четвертей, то в них надо бывает изменить знак. Но это совсем не значит, как обыкновенно полагают, что этот косинус становится отрицательным. Косинус может быть то отрицательным, то положительным, если его переносить из одной стороны уравнения в другую; но сам по себе он всегда количество абсолютное и именно в силу этого надо изменить знак, который он имел в формулах первоначальной системы, т. е. в первой четверти окружности, на рассмотрении которой основывались рассуждения. В противном случае эти формулы, справедливые для первого квадранта, не были бы таковы для второго, что можно доказать непосредственно, найдя путем синтеза формулы, соответствующие этому второму квадранту.

Предполагая, с одной стороны, как это обыкновенно делают, что формулы, непосредственно применимые к острым углам, применимы также и к тупым, а, с другой стороны, что косинус тупых углов отрицательный, допускают сразу два ложных предположения. Но эти ложные предположения исправляют одно другое, потому что, если назвать острый угол через a, то мы будем иметь $\cos a = 1 - \sin \text{versus } a$; таким образом, предполагая, что эта же формула применяется и к тупому углу, вместе с тем, предполагают, что косинус его есть $1 - \sin \text{versus } a$, между тем как, на деле, он, наоборот, есть $\sin \text{versus } a - 1$. Следовательно, в вычислении вместо $\sin \text{versus } a - 1$ полагают $1 - \sin \text{versus } a$, или $1 - \sin \text{versus } a$ вместо $-(1 - \sin \text{versus } a)$, или $\cos a$ вместо $-\cos a$.

Но так как в силу второго предположения косинус тупого угла считается отрицательным, т. е. меняющим в результате вычисления знак, то в этом результате ставят $-\cos a$ вместо $\cos a$. Таким образом, благодаря двум последовательным действиям, сначала ставят $\cos a$ вместо $-\cos a$, а затем $-\cos a$ вместо

$\cos a$, а это все равно, как если бы ничего не изменяли. Но вместе с тем достигают того преимущества, что при вычислениях пользуются одной и той же формулой как для острого, так и для тупого углов.

13. Точно так же делают ложное предположение, когда считают, что уравнение, непосредственно применимое к кривой только в одной четверти, непосредственно применимо к ней во всех четырех. Но ложное предположение исправляется в результате вычислений, поскольку те координаты, которые находятся по отношению к их оси на стороне противоположной той, для которой в действительности уравнение непосредственно применимо, рассматриваются как отрицательные, т. е. как обладающие знаком, обратным тому, который они должны были бы иметь.

Все это легко доказывается путем преобразования координат, но бесполезно каждый раз снова проводить те рассуждения, которые обосновывают эту компенсацию, порождаемую исправляющими друг друга предположениями. Эти предположения следует рассматривать как искусные средства придать бо̀льшую общность вопросу, подводя под одну формулу все однородные задачи, или же задачи, которые, не будучи абсолютно тождественными, связаны, однако, между собой достаточно тесно для того, чтобы было возможно переходить от одной к другой путем простого изменения знака.

14. Известна, например, формула:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b. \tag{A}$$

Эта формула непосредственно относится только к тому случаю, когда все три дуги $a, b, a+b$ меньше, чем четверть окружности; потому что, если бы ее пожелали непосредственно и без изменения применить к бо̀льшим дугам, то совершили бы ошибку, в чем

легко убедиться, определив непосредственно синтетическим путем формулы, соответствующие различным случаям. Поэтому вот что делают для распространения этой формулы на все случаи. Ее в продолжение всего вычисления рассматривают как действительно общую формулу, что является ложным предположением; а для исправления в конечном результате действия этого ложного предположения косинусы дуг бо̀льших, чем четверть окружности, и меньших, чем три четверти, в нем считают отрицательными, т. е. считают, что косинусы изменяют знаки во втором и третьем квадрантах. Что же касается синусов, то их считают отрицательными, т. е. изменяющими знак, в третьем и четвертом квадрантах; это и приводит в каждом случае формулу опять к тому, чем она должна быть, т. е. к тому, чем она была бы в действительности, если бы ее нашли непосредственно путем синтеза. Так, например, если дуги a и b каждая меньше, чем четверть окружности, между тем как $a+b$ больше ее, то $\cos(a+b)$ надо будет придать отрицательный знак, и формула примет вид:

$$-\cos(a+b)=\cos a \cos b-\sin a \sin b,$$

или

$$\cos(a+b)=\sin a \sin b-\cos a \cos b, \qquad (B)$$

т. е. вид, в каком ее в этом случае, действительно, находят непосредственно путем синтеза.

Обозначим синус-верзус и косинус-верзус любой дуги через siv и cov; тогда для уравнения круга мы будем иметь:

$$(1-\mathrm{siv})^2+(1-\mathrm{cov})^2=1.$$

Это уравнение непосредственно применимо ко всем точкам окружности; и, следовательно, мы можем воспользоваться им для того, чтобы придать вышенай-

денной формуле (А) всю доступную ей общность. Действительно, если исключить синусы и косинуы и ввести в нее синус-верзусы (siv) и косинус-верзусы (cov), то мы получим:

$$1 - \text{siv}\,(a+b) = (1 - \text{siv}\,a)\,(1 - \text{siv}\,b) - \\ - (1 - \text{cov}\,a)\,(1 - \text{cov}\,b), \qquad \text{(C)}$$

т. е. формулу, непосредственно и без всяких изменений применимую ко всем четырем четвертям окружности.

Так как в первом квадранте

$$\text{siv}\,(a+b) < 1,\ \text{siv}\,a < 1,\ \text{siv}\,b < 1,\ \text{cov}\,a < 1,\ \text{cov}\,b < 1,$$

то для него формула между синусами и косинусами остается той же формулой (А). Во втором квадранте, если предположить, что $(a+b)$ больше, чем четверть окружности, но a и b каждая меньше ее, мы получим:

$$\text{siv}\,(a+b) > 1,\ \text{siv}\,a < 1,\ \text{siv}\,b < 1,\ \text{и т. д.}$$

Следовательно, формула примет вид:

$$-\,[\text{siv}\,(a+b) - 1] = (1 - \text{siv}\,a)\,(1 - \text{siv}\,b) - \\ - (1 - \text{cov}\,a)\,(1 - \text{cov}\,b),$$

или, вводя обратно синусы и косинусы и делая приведения,

$$\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b,$$

а это уравнение совпадает с формулой (В).

Таким образом следует считать, что формулы (А)

и (B) относятся к частным случаям и происходят от одной, охватывающей их всех, общей формулы (C). И когда при обычном употреблении одну из этих частных формул вроде (A) применяют как общую, то не следует забывать, что в действительности она только представляет эту общую формулу до тех пор, пока не наступит время произвести надлежащие изменения, но что это отнюдь не сама общая формула, потому что если бы она была таковой, то не было бы нужды ни в каком изменении.

15. Для того чтобы было легко решить, каковы те изменения, которые должны иметь место в каждом отдельном случае, когда не употребляют общей формулы, мы составим следующую таблицу, содержащую абсолютные значения всех тригонометрических количеств, относящихся к четырем четвертям круга, выраженных все через величины siv и cov.

16. Эта таблица, способ построения которой понятен без труда, немедленно укажет, какое изменение должно быть произведено в каждой из формул, являющихся непосредственно применимыми при каком-нибудь одном состоянии системы, для того чтобы сделать их непосредственно применимыми в другом состоянии. Если, например, в качестве мерила сравнения взять, как это обыкновенно делают, формулы, относящиеся к первому квадранту, то мы найдем, что в нем

$$\cos a = 1 - \mathrm{siv}\, a.$$

Для второго квадранта мы найдем, что

$$\cos a = \mathrm{siv}\, a - 1.$$

Следовательно, во втором квадранте косинус является обратным по отношению к тому, чем он является в первом квадранте. Поэтому, чтобы сделать непосредственно применимыми ко второму квадранту те

Первый квадрант	Второй квадрант	Третий квадрант	Четвертый квадрант
$\sin a = 1 - \operatorname{cov} a$ $\cos a = 1 - \operatorname{siv} a$	$\sin a = 1 - \operatorname{cov} a$ $\cos a = \operatorname{siv} a - 1$	$\sin a = \operatorname{cov} a - 1$ $\cos a = \operatorname{siv} a - 1$	$\sin a = \operatorname{cov} a - 1$ $\cos a = 1 - \operatorname{siv} a$
$\operatorname{tg} a = \frac{1 - \operatorname{cov} a}{1 - \operatorname{siv} a}$	$\operatorname{tg} a = \frac{1 - \operatorname{cov} a}{\operatorname{siv} a - 1}$	$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{cov} a - 1}{\operatorname{siv} a - 1}$	$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{cov} a - 1}{1 - \operatorname{siv} a}$
$\operatorname{ctg} a = \frac{1 - \operatorname{siv} a}{1 - \operatorname{cov} a}$	$\operatorname{ctg} a = \frac{\operatorname{siv} a - 1}{1 - \operatorname{cov} a}$	$\operatorname{ctg} a = \frac{\operatorname{siv} a - 1}{\operatorname{cov} a - 1}$	$\operatorname{ctg} a = \frac{1 - \operatorname{siv} a}{\operatorname{cov} a - 1}$
$\sec a = \frac{1}{1 - \operatorname{siv} a}$	$\sec a = \frac{1}{\operatorname{siv} a - 1}$	$\sec a = \frac{1}{\operatorname{siv} a - 1}$	$\sec a = \frac{1}{1 - \operatorname{siv} a}$
$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{1 - \operatorname{cov} a}$	$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{1 - \operatorname{cov} a}$	$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{cov} a - 1}$	$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{cov} a - 1}$

формулы, которые непосредственно применимы к первому, надо, согласно общему принципу, изменить в них знак у косинуса.

Так как во втором квадранте

$$\cos a = \operatorname{siv} a - 1$$

или

$$\cos a = -(1 - \operatorname{siv} a),$$

между тем как в первом, наоборот,

$$\cos a = (1 - \operatorname{siv} a),$$

то обыкновенно это отношение двух косинусов выражают, говоря, что косинус становится отрицательным во втором квадранте. Но это, как мы уже заметили, неподходящее выражение: косинус не является отрицательным ни в первом, ни во втором и ни в каком другом квадранте. Например, для того чтобы он был отрицательным во втором квадранте, его значение, которое, как мы только что видели, равное тогда

$$-(1 - \operatorname{siv} a),$$

должно было бы быть действительно отрицательным, каким оно является по внешности. Но так как во втором квадранте

$$\operatorname{siv} a > 1,$$

то из этого следует, что

$$1 - \operatorname{siv} a$$

есть само по себе отрицательное количество и что значит,

$$-(1 - \operatorname{siv} a)$$

снова оказывается положительным количеством.

17. В качестве еще одного примера употребления этой таблицы я рассмотрю, как нужно изменить формулы первого квадранта для того, чтобы сделать их непосредственно применимыми к третьему. Предположим, что требуется найти секанс.

Я вижу, что в первом квадранте

$$\sec a = \frac{1}{1 - \mathrm{siv}\, a},$$

а в третьем

$$\sec a = \frac{1}{\mathrm{siv}\, a - 1}.$$

Но для того чтобы привести это последнее уравнение к тому же виду, что и первое, надо изменить знак; отсюда я заключаю, что секанс третьего квадранта является обратным (inverse) по отношению к секансу первого и что поэтому нужно, на самом деле, переменить в формулах знак. Для того чтобы убедиться в этом, умножим в уравнении для первого квадранта, т. е. в уравнении

$$\sec a = \frac{1}{1 - \mathrm{siv}\, a},$$

числитель и знаменатель дроби на знаменатель

$$1 - \mathrm{siv}\, a.$$

Мы будем иметь тогда:

$$\sec a = \frac{1}{(1 - \mathrm{siv}\, a)^2} - \frac{\mathrm{siv}\, a}{(1 - \mathrm{siv}\, a)^2}.$$

Произведя то же преобразование в формуле для третьего квадранта, т. е. в

$$\sec a = \frac{1}{\mathrm{siv}\, a - 1},$$

мы будем иметь:

$$\sec a = \frac{\operatorname{siv} a}{(\operatorname{siv} a - 1)^2} - \frac{1}{(\operatorname{siv} a - 1)^2}.$$

Так как $(\operatorname{siv} a - 1)^2$ есть то же самое, что $(1 - \operatorname{siv} a)^2$, то значения секанса в первом и третьем квадрантах суть разности одних и тех же переменных:

$$\frac{1}{(1 - \operatorname{siv} a)^2} \text{ и } \frac{\operatorname{siv} a}{(1 - \operatorname{siv} a)^2},$$

взятые в обратных направлениях, откуда следует, что секансы первого и третьего квадрантов, хотя и совпадают как по величине, так и по направлению, являются, однако, противоположными (opposées) количествами в том смысле, какой придают этому слову аналисты. Это доказывает, что это слово не всегда представляет собой вполне ясную для разума идею и что эти противоположные количества суть не что иное, как количества обратные (inverses), точное и ясное определение которых мы дали в (9).

18. Следует, впрочем, признать, что за некоторыми, достаточно редкими исключениями легко распознать те количества, которые при каждом переходе от одного состояния системы к другому становятся *обратными* (inverses) или, как выражаются неподходящим образом, ***отрицательными***, т. е. те количества, которые должны изменить знак. Однако обыкновенно эти перемены знака вовсе не совершают при каждом изменении состояния системы; их оставляют в продолжение всего хода вычисления такими, какими они были бы, если бы мы не вышли за пределы первоначальной системы, т. е. того состояния, относительно которого были обоснованы рассуждения для составления уравнения и которое принимают за мерило сравнения с другими состояни-

ями; и только уже в самом конечном результате производят необходимые изменения. Этот способ действий и является существенным отличием анализа от синтеза. Последний допускает при вычислении всегда только явные (explicites) формы, т. е. абсолютные количества и непосредственно выполнимые операции. Поэтому, по мере того как состояние системы изменяется, синтез должен соответственно изменять свои формулы так, чтобы они никогда не переставали служить верным изображением той системы, за которой он следует во всех ее изменениях. Анализ, наоборот, отправляется от определенного состояния; это определенное состояние является первоначальной системой, которую он принимает за мерило сравнения и на которой он строит свои рассуждения при выражении условий задачи. При этом рассуждении он для выражения условий задачи в уравнении поступает совершенно так же, как и синтез, т. е. рассматривая все количества как абсолютные и употребляя знаки *плюс* и *минус* только для обозначения действительных сложений и вычитаний. Но затем, вместо того чтобы подобно синтезу изменять по мере перехода от одного состояния системы к другому свои первоначальные формулы, он рассматривает эти первоначальные формулы как соответствующие безразлично всем последовательным состояниям системы. Благодаря этому он избавляется от необходимости исследовать в отдельности каждый частный случай, предоставляя самому вычислению заботу исправить действие ложных предположений и отдаляя до конца вычисления те изменения, которые, может быть, окажутся тогда необходимыми. Таким образом синтез занимается только абсолютными количествами и непосредственно выполнимыми операциями, удовлетворяющими предложенному вопросу, между тем как анализ рассматривает все алгебраи-

ческие формулы, способные удовлетворить найденным уравнениям. Но затем анализ исключает отрицательные и мнимые формы, подвергая их обыкновенным алгебраическим преобразованиям, как если бы то были истинные количества, и приводит, таким образом, свои уравнения к желательным явным (explicites) формам, без чего вычисление не было бы закончено, ибо оно допускало бы дальнейшие упрощения.

Ни одно количество не может стать ни отрицательным, ни мнимым, не перестав быть истинным количеством, потому что истинными количествами являются, очевидно, только количества абсолютные. Когда, прибегая к неподходящему обороту, говорят, будто такое-то количество стало отрицательным или мнимым, то это значит, что, на самом деле, нужно в ходе вычисления или в его конечном результате заменить это истинное количество отрицательной или мнимой функцией для того, чтобы исправить те формулы, относительно которых ошибочно предполагали, что они непосредственно применимы к новому состоянию системы. Отнюдь не само количество является отрицательным или мнимым, им является только чисто алгебраическая форма, которую нужно поставить вместо него для того, чтобы сохранить точность формул.

Так, например, если назвать через a острый угол и через π — угол прямой, то вовсе не $\cos(2\pi - a)$ будет отрицательным, — он совершенно так же положителен, как и $\cos a$, и тот и другой суть абсолютные и совершенно равные количества. Отрицательной является алгебраическая функция $-\cos(2\pi - a)$, которую действительно нужно подставить в вычисление или его результат для исправления тех формул, которые были установлены только для острых углов и которые, следуя ложному предположению, желают распространить и на тупые углы.

Точно так же никогда не может быть отрицательным $\sec(2\pi + a)$, ибо он совершенно тождественен с $\sec a$, отрицательным же является $-\sec(2\pi + a)$, который надо непременно подставить вместо $\sec(2\pi + a)$, чтобы исправить в результате вычисления сделанное первоначально ложное предположение, рассматривающее формулы, непосредственно применимые только в первом квадранте, как применимые ко всем без различия точкам окружности. И нельзя сказать, что количество, поставленное взамен другого, будет ему равно, потому что это означало бы, что $-\sec(2\pi + a)$ равен $\sec(2\pi + a)$ или что -1 равна 1, что совершенно нелепо.

Точно так же, если назвать через y ординату кривой, то количество y вовсе не становится отрицательным при переходе с одной из сторон оси абсцисс на другую: y всегда остается абсолютным количеством; отрицательным же является лишь алгебраическое выражение $-y$, которое, действительно, нужно подставить вместо этого абсолютного количества y, при переходе с одной стороны оси абсцисс на другую для того, чтобы исправить то ложное предположение, которое допускали, считая неподходящим образом уравнение кривой непосредственно применимым во всех четырех четвертях, между тем как на деле оно применимо только в первой.

Следовательно, когда говорят, что *те или другие количества становятся отрицательными или мнимыми*, то нужно рассматривать это выражение как сокращенное выражение того, что эти количества должны быть заменены в результате вычисления действительно отрицательными и мнимыми алгебраическими выражениями для исправления того ложного предположения, которое было допущено при составлении уравнения, когда эти уравнения считали непосредственно применимыми во всех слу-

чаях. Таким образом это только образный (fictif) оборот речи, впрочем, оборот очень полезный, потому что он дает возможность охватить посредством одной формулы все отдельные случаи задачи, откладывая на самый конец все те изменения, которые может оказаться необходимым в ней произвести, для того чтобы исключить противоречия, полностью еще не уничтоженные произведенными в процессе вычисления преобразованиями.

Кажется, можно было бы раз навсегда избежать и этого неподходящего способа выражения, придуманного, вероятно, для сокращения, и многословных описательных оборотов, которых требует развитие точной теории, называя *соотносительным значением* (valeur de corrélation) какое-нибудь выражение, которое должно заменить абсолютное значение некоторого количества, для того чтобы исправить те формулы, в которые оно входит, когда их хотят сделать непосредственно применимыми к новому случаю, не содержавшемуся в этих первоначальных формулах. Так, например, если назвать прямой угол через π, то выражение $-\cos(2\pi - a)$ уже не будет значением косинуса угла дополнительного для a, или же значением $\cos a$, когда a тупой угол, — выразиться так было бы нелепо, — а будет просто его *соотносительным значением*, т. е. тем значением, которое надо, действительно, подставить вместо $\cos a$ в формулы, соответствующие первому квадранту, когда их хотят сделать непосредственно применимыми ко второму. Точно так же $-y$ не будет истинным значением y, соответствующим левой части оси абсцисс, а только его *соотносительным значением*, т. е. тем значением, которое надо, действительно, вместо него подставить для того, чтобы уравнение кривой, непосредственно применимое только в первой четверти, сделалось применимым и во второй и в третьей

четвертях. Тогда можно было бы говорить, не боясь впасть в ошибку, что *соотносительное значение того или другого количества становится отрицательным или становится мнимым.*

Соотносительные значения количеств, принадлежащих какому-нибудь одному состоянию системы, являются, таким образом, не чем иным, как алгебраическими функциями, которые должны быть подставлены вместо соответствующих абсолютных количеств первой системы в относящиеся к ней формулы для того, чтобы эти формулы стали непосредственно применимыми к новому состоянию той же самой системы.

Эти алгебраические функции могут быть положительными, отрицательными или мнимыми выражениями, смотря по тому, каким будет это новое состояние системы по отношению к первому или к первоначальной системе, т. е. к системе, на которой были построены все рассуждения: это те значения, которые удовлетворяют первоначальным уравнениям, когда их желают непосредственно применить к новому состоянию системы, или, что все равно, это те значения, которые получаются из первоначальных уравнений, когда их непосредственно применяют к этому новому состоянию. Так как эти два состояния различны, то может случиться, что эти значения будут отрицательными или даже мнимыми, но это отнюдь не будут истинные значения, это только соотносительные значения; истинные значения являются абсолютными количествами, которые они собой выражают (représentent); и согласно изложенной нами теории эти истинные значения являются обратными (inverses) по отношению к тем, которые им соответствуют в первоначальной системе, если их соотносительные значения являются выражениями отрицательными. Мы можем это выразить, сказав, что

если соотносительное значение какого-нибудь количества становится отрицательным, то его абсолютное значение становится обратным, и именно так надо понимать тот общеизвестный принцип, согласно которому *отрицательные значения следует брать в смысле противоположном положительным значениям*. Эти отрицательные значения не что иное, как соотносительные значения, а значения, которые надо брать в смысле противоположном положительным значениям, — это абсолютные количества, соответствующие этим соотносительным значениям и, на самом деле, обратные по отношению к тому, чем они были в первоначальной системе. Таким образом можно ничего не изменять и даже буква вышеназванного принципа остается нетронутой. Мы здесь желаем только вскрыть присущий ему точный смысл и дать доказательство его посредством одних лишь математических рассуждений.

Таким образом, когда, следуя принятому обычаю, говорят, что то или иное количество становится отрицательным, то это должно относиться к его соотносительному значению по отношению к тому или иному состоянию системы, а когда говорят, что тогда надо брать это количество в смысле противоположном тому, который приписывался ему в выражении условий задачи, то это, напротив, должно относиться только к его абсолютному значению, которому, действительно, должно быть придано другое значение, чем первоначально, так что, если при составлении уравнения ему придавали значение количества $(m - n)$, где предполагалось $m > n$, то в результате вычисления его нужно будет взять в виде обратного количества $(n - m)$, где предполагается $n > m$.

Соотносительное отрицательное значение, таким образом, является не чем иным, как абсолютным значением, взятым вместе со знаком *минус*, и, следова-

тельно, оно есть сложная алгебраическая форма, выражающая сразу и количество и действие, которое надо произвести над этим количеством, действие, которое было бы невыполнимым, если бы это выражение оставалось изолированным. Но все эти загадочные (hiéroglyphiques) формы исчезают после преобразований; и первоначальные формулы, которые сначала были непосредственно применимы только к тому состоянию системы, на котором основывались рассуждения, становятся, благодаря этим преобразованиям, непосредственно применимыми последовательно ко всем другим состояниям этой системы.

19. Мне кажется, что эти рассуждения устраняют все трудности. Совершенно ничего не изменяется в употребительных поныне операциях (marche); только доказывается, что мы имеем право их применять и что они всецело основаны на чисто математических понятиях. Обыкновенно каждую задачу выражают посредством уравнений, рассматривая все те количества, на которых основывается рассуждение, как абсолютные. Эти первоначально образованные уравнения рассматриваются как непосредственно применимые ко всем тем состояниям, в которых система может последовательно находиться, и только в самом конечном результате вычисления производятся изменения, необходимые в каждом частном случае. Когда, наконец, достигают этого результата и в нем оказываются невыполнимые операции, то отсюда заключают, что вышли за пределы того первоначального состояния, к которому должны были относиться рассуждения, и тогда стараются установить новое состояние системы, к которому должны относиться найденные уравнения, для чего в предположениях, на которых основывалось вычисление, производят изменения, требуемые переходом от первого состояния системы ко второму. При этой операции, смутно намечаемой сло-

вами, что отрицательные величины следует понимать в смысле противоположном положительным величинам, приходится руководствоваться только навыком в вычислениях. Так поступают всегда со времен Декарта, и к таким же следствиям приводят установленные нами принципы, устраняя или исправляя те ложные понятия, на которые, повидимому, указывают обороты речи, употребляемые при обычном пользовании анализом.

20. Из всего предшествующего ясно, что анализ отличается от синтеза не тем, как это обыкновенно полагают, — будто последний оперирует только известными количествами, между тем как анализ оперирует неизвестными количествами, как если бы они были известными, а тем, что анализ, действительно, оперирует отрицательными количествами, как если бы они были положительными, чего никогда не делает синтез, хотя он так же как анализ оперирует и неизвестными количествами. Именно это различие и дает анализу столь большое преимущество по сравнению с синтезом, ибо он объединяет в одной общей формуле все те случаи, для которых в синтезе необходимо множество исследований и частных формул иибо последний пользуется для сравнения всегда лишь истинными количествами, сравнивая их всегда либо непосредственно, либо через посредство таких же, как и они, действительных количеств. Анализ, наоборот, часто принимает в качестве мерила сравнения истинных количеств разные фиктивные (imaginaires) понятия, чисто алгебраические формы; но эти алгебраические формы всегда заключают в себе не который момент (indice), который служит для ихисключения посредством различных преобразований, имеющих целью освобождение от них результатов вычисления и приводящих последние к явным (explicites) формам, без чего вычисление оставалось бы незавершенным и бесполезным.

Нельзя не заметить, как мы уже сказали в начале этого примечания, значительного сходства между этими приемами и приемами анализа бесконечно-малых. Последний достигает своей цели посредством компенсирующихся ошибок, а первый — посредством исправляющих друг друга противоречивых гипотез. В анализе бесконечно-малых бесконечно малые количества суть только вспомогательные количества, которые необходимо исключить для получения искомых результатов; в алгебре изолированные отрицательные и мнимые количества также употребляются только как вспомогательные средства и как орудия, которые оказываются совершенно лишними для уже сооруженного здания.



ЛАЗАРЬ КАРНО, ОРГАНИЗАТОР ВОЕННЫХ ПОБЕД РЕВОЛЮЦИИ
(1753—1823)



ОЧЕРК
М. Э. ПОДГОРНОГО



1

Рассказывают, что один из судей Лавуазье — не то Дюма, не то Коффингаль (легенда имеет две версии),— отсылая великого химика на гильотину, напутствовал его словами: «*Революция не нуждается в ученых*».

Этот роялистский анекдот, сочиненный для дискредитации революционной эпохи в глазах интеллигенции, занимает, одно из центральных мест в составленном реакцией синодике якобинских злодейств. Он привился, прочно врос в историю и сделался настолько традиционным, что без него не обходится почти ни один очерк жизни Лавуазье, ни одна обзорная работа, посвященная науке революционной эпохи. Но трудно поверить, чтобы приписываемая трибуналу фраза

была когда-нибудь им произнесена. Гильом категорически отвергает всякую вероятность этой реплики[1]. Повидимому, она принадлежит к числу тех фальшивок, на основе которых нередко создается писанная история. Историю не только делают, но и изображают люди разных классов, стремящиеся придать одним эпохам не принадлежащий им лоск и наделить другие искажающими их пятнами. Похоже на то, что и мнимая реплика Коффингаля является принадлежностью того маскарадного костюма, в который нарядили Великую французскую революцию враждебные ей реакционные историки. Однако даже если бы с языка трибунальского судьи, конечно, не принадлежавшего к избранным умам революции, в самом деле сорвалось необдуманное слово, оно бы ни в какой мере не могло характеризовать подлинного отношения революционного правительства к ученым, оно бы нисколько не рисовало истинного положения науки в годы якобинской диктатуры.

История повторяется. Грехи, инкриминировавшиеся в свое время Великой французской революции, теперь, спустя полтораста лет, почти без всякого подновления предъявляются в виде обвинений советской власти. Снова пускается в ход самая беззастенчивая, грубая клевета, сопровождающая каждый шаг революционной власти, каждый творческий ее порыв. Как полтора века назад враждебный новому режиму мир изображал взявших в свои руки власть санкюлотов каким-то сборищем каннибалов, поставивших себе целью разрушение культуры и низведение человека до уровня первобытного дикаря, так и теперь советская власть, превратившая науку из служанки и содержанки эксплоататоров в творческое орудие революционного пролетариата, вкладывающая крупнейшие средства в развитие научно-исследовательских учреждений и поднявшая просве-

---

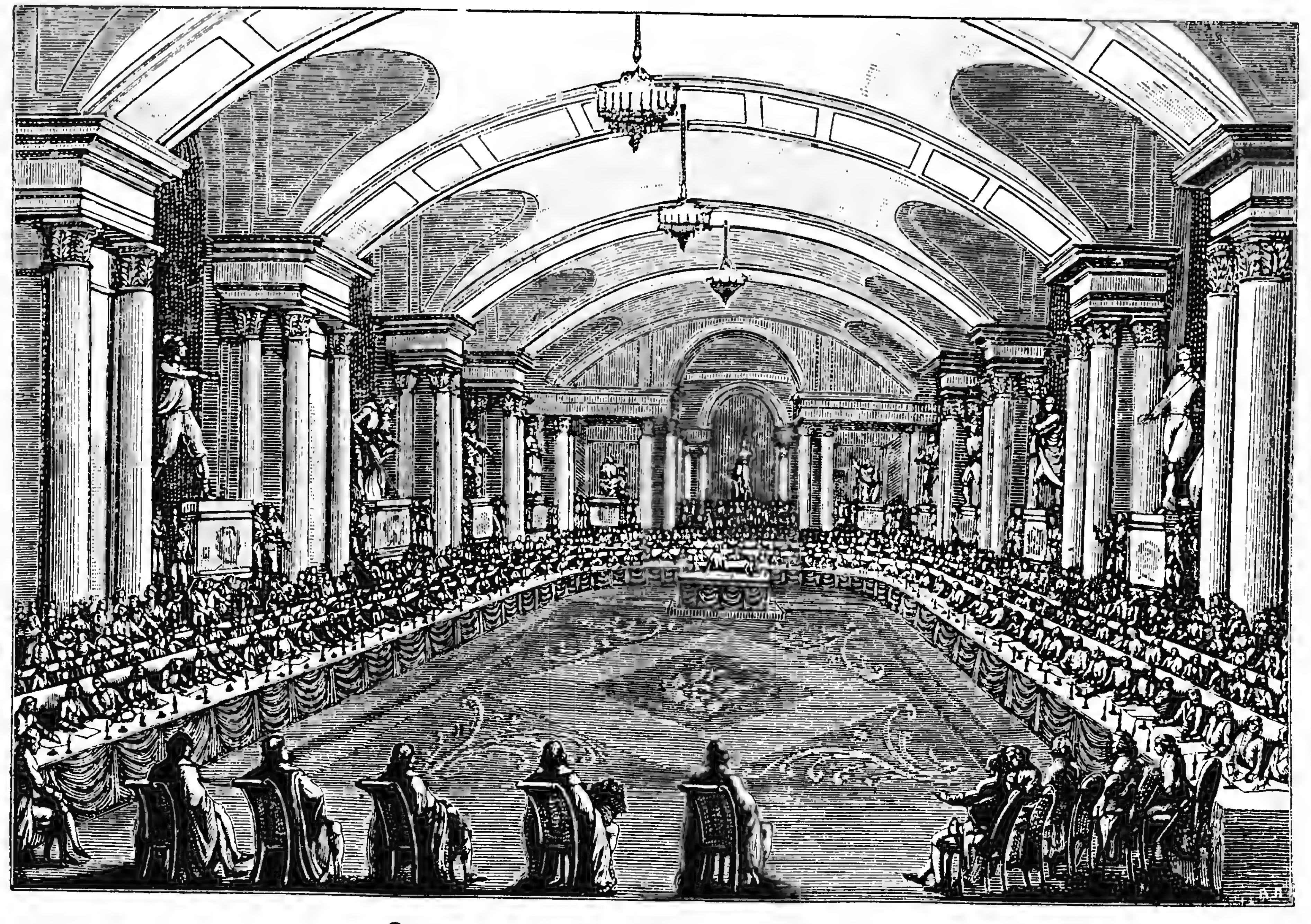
[1] См. «Révolution française», т. XXXVIII; см. также статью Ж. Гильома в томе XLII упомянутого журнала и статью Доманже в «Annales révolutionnaires» за январь 1917 г.

щение на невиданную в царской России высоту, чуть ли не ежедневно обвиняется организаторами «обезьяньих процессов» в вандализме, террористическом угнетении ученых, разрушении цивилизации и т. д. Да, конечно, пролетариат создает культуру, отличную от капиталистической, как революционная буржуазия времен Конвента создавала культуру, отличную от феодальной. Но как ни различны классовые устремления коммунистов и якобинцев, как ни отличаются они методами борьбы и классовым содержанием последней,— как партии революционные, как акушеры истории, ставящие своей целью организованное воздействие на развитие производительных сил общества, в очень многом и, в частности, в оценке полученного ими культурного наследства они безусловно сходятся. Обе революции — буржуазная XVIII в. и пролетарская XX в.— не отказались от всего многовекового культурного наследства прежних эпох, но лишь на основе его критического освоения подошли к созданию культуры новых, пришедших к власти классов. И, естественно, Великая французская революция не могла вставать в оппозицию к науке; молодая буржуазия описываемого времени, являвшаяся классом созидавшим, неизбежно, силой вещей должна была итти не на угнетение науки и ее служителей, а на поддержку исследовательских работ, на развитие научного творчества.

Конечно, в классовом обществе, основанном на угнетении одних и паразитарном существовании других, наука, являясь достоянием привилегированной касты, носит резко выраженный классовый характер. Но в годы крупных социальных катаклизмов, какими были для Франции последние годы XVIII в., кастовая замкнутость науки уничтожается, наука демократизуется и мобилизуется на службу новому, прежде не приобщенному к ней классу. Этим и определялось отношение якобинцев к науке и к ученым. Ученые, пошедшие на службу революции, принесшие ей свои знания и таланты, были любовно встречены победившими массами; ученых, занимавших колеблющуюся позицию

якобинцы стремились повести за собой, сохранив их для революции; наконец, к третьей, сравнительно малочисленной части ученых, оставшейся по другую сторону баррикад, цеплявшейся за прежнюю кастовую замкнутость науки, противодействовавшей ее демократизации и пытавшейся использовать науку против революционных масс, вредя их созидательной работе, последние отнеслись, как к своим классовым врагам. Эту группу ученых революция, естественно, не пощадила. Но разгром этой группы никак не означал упадка культуры, задержки развития научной мысли или похода против ученых, как это изображают Тэн и другие реакционные историки. Наоборот, пышный расцвет науки во Франции этого периода как нельзя лучше характеризует общее положение ученых в годы Великой революции.

Франция была в это время культурнейшей страной в мире, и, несомненно, высоким уровнем своей культуры в описываемую эпоху она обязана революционному движению. Революция сообщила могучий толчок развитию естествознания и техники в переживавшей крупнейшие социальные ломки стране. Быстро развивавшаяся промышленность, сбрасывавшая с себя феодальные оковы, раскрепощавшееся от дворянских пут сельское хозяйство, а в дальнейшем революционная оборона требовали от науки эвристической помощи. Якобинское правительство превосходно учитывало значение естествознания и техники в развитии народного хозяйства и в обороне страны, оно прекрасно понимало, что *революция чрезвычайно нуждается в ученых*, и отражением этого отчетливого понимания нараставшей роли науки явились, например, такие акты Конвента, как учреждение Нормальной школы для подготовки научных работников, Политехнической школы для воспитания гражданских и военных инженеров и Института (с его физико-математической секцией). Сознавая, что научная мысль — один из самых острых видов оружия в руках борцов, якобинское правительство с первых же своих шагов стало на путь привлечения ученых к революционной работе, окружая их вни-



Открытие Национального института

манием, почетом и заботой. «Никогда наука не была так популярна,— пишет А. Матьез,— так уважаема, так лелеема, как в эти прекрасные годы... Все революционеры, даже самые скромные, питали уважение, больше того, культ науки. Все они знали о тех неоценимых услугах, какие наука оказывала каждый день делу национальной обороны... Если четырнадцать революционных армий сумели одержать победу, то только потому, что наука, в частности химия, которая была в ту пору чисто французским созданием, дала им средства для этого. *Научная Франция в такой же мере, как и Франция военная, не может быть во II году республики отделена от Франции политической*.. Одна и та же Франция и в одном и том же порыве вела борьбу и в лабораториях, и в клубах, и на полях сражений»[1].

Охваченная огнем жесточайшей политической борьбы, изнуренная голодом и блокадой, втянутая в тяжелую оборонительную войну с многочисленными интервентами, революционная страна выдвинула не только великих государственных деятелей, не только первоклассных полководцев, но и целый ряд крупнейших ученых, бок о бок с политиками и воинами боровшихся за победное торжество идей революции. Не упадок, не затишье, но, наоборот, стремительное развитие французской науки характеризует эту эпоху. Более того, *эти годы оказались для науки настолько плодотворными, что их дыхание чувствуется на протяжении всего XIX века*. «Весь XIX век, тот век, который дал цивилизацию и культуру всему человечеству, прошел под знаком французской революции»[2].

Если в области математических знаний XVIII столетие было ознаменовано развитием аналитических идей Декарта,

---

[1] А. Матьез, Как побеждала французская революция (М., 1928), стр. 158 и 164 (курсив мой.— *М. П.*).

[2] Ленин, Собр. соч., 1-е издание, т. XVI (Гиз, 1922), стр. 221.

Ньютона и Лейбница, то произведенная Конвентом реформа преподавания приводит к попыткам свести эти идеи в одну систему, открывшим широкий простор новым направлениям, создавшим неожиданный расцвет науки. Понятия и методы, принадлежавшие XIX веку, в революционные годы уже либо существовали в зачаточном состоянии, либо уже вполне сформировались. Теория функций, новая теория чисел, новая геометрия и новая механика берут свое начало в эту славную эпоху. Во главе этого научного движения стоят такие математики, как творец *Аналитической механики* Лагранж, создатель *Начертательной геометрии* Монж, Лазарь Карно, Фурье и др. «Если прибавить к этим великим именам еще имя Лапласа,— пишет Поль Таннери,— если перечислить плеяду менее оригинальных ученых, труды которых все же долгое время оставались классическими, как, например, Лежандра и Лакруа, если принять во внимание, что первые выпуски учрежденной Конвентом Политехнической школы уже дали таких ученых, которые, еще не достигнув апогея до 1815 года, выпустили в свет столь прославленные труды, как *Traité de méchanique* (1803) Пуассона или *Eléments de statique* (1803) Пуансо, то станет ясно, что первенство Франции в этот период столь же несомненно в математике, как и в военном деле, и что *если она заняла первое место и в области точных наук, то также благодаря подъему, который революция сообщила мысли*»[1].

Науке этой эпохи чужды задачи, оторванные от жизни. Математика развивается в этот период как отрасль знания, направленная не только на разработку абстрактных, еще неприкладных проблем, но и на удовлетворение нужд народного хозяйства и революционной обороны. Не случайно,

---

[1] «История XIX века», под ред. Лависса и Рамбо (2-е русское издание), т. I, стр. 234 (курсив мой.— *М. П.*); в ближайшее время работа Таннери («Очерки по истории естествознания в новое время») выходит отдельной книгой в издании ГТТИ.

что именно во Франции в эту пору быстро развиваются основные геометрические дисциплины, что наиболее яркого своего представителя они имеют в лице такого «прикладника», как Монж, следующим образом сформулировавшего задачи народного образования: «*Чтобы вывести французскую нацию из той зависимости от иностранной промышленности, в которой она до настоящего времени находилась, необходимо, в первую очередь, направить национальное воспитание к познанию вещей, требующих точности;— что до сих пор находилось в полном пренебрежении,— и приучить руки наших специалистов к употреблению всевозможных точных инструментов*»[1].

Большой шаг вперед сделали в эту пору также физика и химия; научный метод, создавший реформу преподавания в Политехнической школе, сказался и в этих областях. Революционные войны дали мощный толчок развитию прикладной химии, без которой немыслима была бы победа Франции над войсками коалиции. Новые открытия в области химии приводили к созданию новых отраслей промышленности, а развитие последней выдвигало ряд новых задач перед наукой. Если механики были озабочены в это время усовершенствованием пара для его использования как двигательной силы, а физики приступали к исследованию электрических явлений, то химики искали и уже находили способы применения открытых ими реакций для практических целей. Наука того времени насчитывала в своих рядах таких ученых, как Кулон, Био, Малюс, Дюлон, Каньяр-де-Латур, Араго, Пти, Бертолле, Гэй-Люссак, Лавуазье, Фуркруа, Шапталь, Гюитон де-Морво, Беккерель, Френель и др. «Успехи, достигнутые химией в течение тридцати лет революции и наполеоновской эпохи,— пишет один из этих ученых (Жан-Антуан-Клод Шапталь),— покажутся потомству тем более удивительными, что *важнейшие открытия были сделаны среди политических бурь*; когда-нибудь будут

---

[1] Предисловие к «Начертательной геометрии».

спрашивать, каким образом народ, воевавший со всей Европой, мог поднять свою промышленность на ту высоту, какой она достигла» [1].

Впрочем, вряд ли следует удивляться величию успехов, достигнутых наукой революционной страны в тяжелые для ее существования годы. Именно требованиями экономики, именно нуждами обороны и объясняется значительная доля этих успехов. Даже те историки, которые не видят связи науки с экономикой, вынуждены признать, что именно революция создала условия для успеха крупных научных работ этого времени. Один из таких историков — Фердинанд Розенбергер — сообщает, например, что «как ни неблагоприятны были для процветания наук времена французской революции и последовавших за нею больших наполеоновских войн, однако они ознаменовались очень важными научными приобретениями, *для осуществления которых в мирное время требовались бы, может быть, долгие годы*» [2].

В этой формулировке следствие не объяснено причиной. Но для нас существенно отметить, что якобинское правительство никогда не упускало из виду значения техники и естествознания для разрешения задач, стоявших перед страной, и всячески форсировало развитие науки, используя ее достижения для нужд обороны и развития экономики.

Когда в разгар военной опасности, летом 1793 г., обнаружилось, что революционную армию нечем вооружить, что арсеналы Франции пусты, что сталелитейная промышленность не налажена (а экономическая блокада лишила Францию возможности импортировать сталь из-за границы), что пороха

---

[1] «De l'industrie française», т. II, стр. 36 (курсив мой.— *М. П.*).

[2] «Очерк истории физики», ч. 3, вып. I. Перевод с нем. под ред. И. М. Сеченова. СПб., 1892, стр. 98 (подчеркнуто мною.— *М. П.*); в ближайшее время ГТТИ выпускает из печати новый перевод цитируемой книги.

не было из-за отсутствия селитры (которую прежде ввозили во Францию из Индии) и т. д. и т. д., — якобинское правительство нашло верный путь для разрешения обнаружившихся трудностей. «*Комитет общественного спасения*,— говорит зоолог Пуше,— *имел ощущение, что победит он только при помощи науки*». Он обратился к ученым, призвав их для разрешения труднейшей задачи, чуть ли не в несколько недель создать новую промышленность и обеспечить армию всем необходимым. Призыв революционной власти не остался без ответа. С удесятеренной энергией принялись мобилизованные ученые за порученную им работу; своими опытами в лабораториях и на заводах научные работники вносили крупнейшие вклады в дело обороны страны и развития промышленности. Гассенфратц, Фуркруа, Монж, Вандермонд, Бертолле и др. буквально в несколько недель создали во всех подходящих помещениях сталелитейные заводы и фабрики холодного и огнестрельного оружия Химик Фуркруа организовал использование церковных колоколов для изготовления пушек. Монж ускорил процесс изготовления стали и усовершенствовал способ высверливания и обточки орудий сейчас же после выплавки. Когда в декабре 1793 г. мозельская армия вынуждена была отступить у Кайзерлаутерна из-за недостатка пороха (дефицитного из-за отсутствия селитры), Монж предложил способ добычи селитры из почвы Франции, организовал эту добычу в широких размерах,— и в короткое время армия была обеспечена порохом в необходимых количествах. «Никогда,— писал Барер,— никакая революция не являла еще такой картины, *когда народ внезапно стал химиком, физиком, отливал* пушки, приготовлял селитру с неменьшей активностью и с таким же талантом, как самые испытанные специалисты, руководившие этой кампанией». Уже весной 1794 г. обильно снабженные порохом армии могли начать наступление. «*Победы при Ваттиньи и при Флерюсе*,— сообщает Матьез,— *были в такой же мере победами ученых, как и генералов*».

Когда понадобилась кожа, чтобы обуть полмиллиона босых армейцев, Фуркруа открыл метод, позволивший производить в несколько дней те операции дубления, которые до его открытия требовали нескольких лет. Когда в объединенной республике потребовалось установление единых мер, чтобы облегчить заготовки для армии и торговые связи между отдельными департаментами, Конвент предпринял большие научные работы, приведшие к созданию метрической системы, принятой теперь во всем мире. Чтобы улучшить связь с многочисленными армиями и наладить централизованное оперативное руководство военными действиями, в эту пору получает применение зеркальный телеграф. В бою при Флерюсе впервые для целей военной разведки генералом Морло был употреблен воздушный шар.— Все нужды обороны были охвачены изобретениями ученых. «*Нельзя и перечислить всех открытий того времени, подсказавших победу войскам революции*» (Араго).

Один физик, написавший труд по истории науки в эпоху французской революции, попытался подвести итог тем достижениям, которых добились научные работники Франции в деле обеспечения победы революционных армий в эпоху Террора. Этого физика никак нельзя заподозрить в сочувствии якобинцам: для его политической характеристики достаточно сказать, что граф Шамбор, неудачный наследник французского престола, всю жизнь остервенело воевавший с любым проявлением политического радикализма и сделавшийся знаменем французских легитимистов, называл этого физика (речь идет о Био) одним из самых преданных своих друзей. Так вот как изображает Био помощь, оказанную учеными республике для ее обороны:

«Двенадцать миллионов фунтов селитры было извлечено из почвы Франции в течение девяти месяцев; раньше ее добывали около миллиона фунтов в год. Было организовано пятнадцать литейных заводов для изготовления бронзовых орудий, с годовой производительностью в семь тысяч штук; до революции во Франции было только два предприятия

этого рода. Было сооружено тридцать литейных заводов для изготовления железных орудий, дававших тринадцать тысяч пушек в год; к началу войны таких заводов было только четыре, и они давали в год девятьсот орудий. В такой же пропорции возросло производство снарядов для артиллерии. Двадцать новых фабрик холодного оружия были основаны и велись по последнему слову науки и техники; до войны была только одна такая фабрика. В Париже была заново создана огромная фабрика огнестрельного оружия, дававшая сто сорок тысяч ружей в год, т. е. больше, чем все прежние фабрики, вместе взятые; по тому же плану было организовано еще несколько предприятий того же рода в различных департаментах республики. Функционировало сто восемнадцать мастерских для починки всякого рода оружия; до войны их было только шесть. Было организовано производство карабинов, — оружия, производство которого не было раньше известно во Франции; был открыт и настолько усовершенствован способ восстанавливать каналы орудий, что его можно было применять непосредственно на поле сражения» [1].

Могло ли якобинское правительство недооценивать эту помощь ученых? Могло ли оно добиться таких грандиозных результатов от их работы, не окружая их вниманием и заботой? — Ответ ясен. Слова о том, что *«революция не нуждается в ученых»*, не могли исходить из уст сознательного якобинца. Вся практика якобинской диктатуры говорит как раз об обратном. И ведь не только в научной жизни играли первую скрипку такие люди, как Монж, Фурье и др. Эти люди играли крупную роль и в общественной жизни страны. «*В ту эпоху* (*в годы революции*),— пишет Ф. Клейн,— *математик и инженер были во Франции в такой же мере людьми политической жизни, в какой у нас* (в Германии.— *М. П.*) *это доступно разве*

---

1 «Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la Révolution», Paris, 1803.

только юристу» [1]. Якобинец Монж, друг и соратник Робеспьера, после низложения Людовика XVI был избран членом временного Исполнительного совета и до середины 1793 г. руководил морским министерством. Математик Фурье был также революционером («патриотом» — по терминологии эпохи) и принимал участие в египетской экспедиции. Химик Фуркруа был членом Конвента, а в декабре 1793 г., в период разыгравшихся битв между дантонистами и гебертистами, состоял председателем якобинского клуба. Другой химик — Гюитон де-Морво — был одним из основателей якобинского клуба в Дижоне, депутатом Законодательного собрания и членом первого Комитета общественного спасения. Вряд ли еще в какую-нибудь предшествовавшую эпоху руководящие партийные и правительственные органы насчитывали в своем числе столько высококультурных людей, как в дни Террора. И если несколько ученых пали жертвой последнего, то это не может быть поставлено в вину революции. Эдуард Гримо указывает на очень характерное обстоятельство, что никто из ученых этой эпохи, сотрудников, учеников и друзей Лавуазье, не вмешался в его защиту, когда он был присужден к гильотинированию [2]. Все были убеждены в его виновности и в правоте трибунала, судившего, конечно, сурово, но так, как этого требует военная обстановка революции. Однако по отношению к ученым, переходившим на сторону революции, или даже к тем ученым, которые хотя и не приняли революции, но не пред-

---

[1] Феликс Клейн, История математики в XIX в., гл. II (цитирую по рукописи перевода, готовящегося Государственным технико-теоретическим издательством к печати. — *М. П.*).

[2] Проф. М. А. Блох сообщил мне о недавно найденных им материалах, иллюстрирующих активное участие химика Фуркруа в обвинении Лавуазье. Эти материалы, публикуемые М. А. Блохом в его очерке жизни Лавуазье (выходит в издании Журнально-газетного объединения), могут служить лишним доводом против роялистской версии об антинаучной подоплеке процесса.

ставляли для нее опасности, правительство выказывало особую заботливость, нередко освобождая их от выполнения тяжелых общественных повинностей, помогая им материально, делая для них исключения из общих правил и т. д. Когда, например, декретом Конвента было постановлено изгнать из Франции всех родившихся вне ее пределов, то для Лагранжа, уроженца Италии, хотя и не являвшегося республиканцем подобно Монжу или Фуркруа, было, как для ученого, сделано особое исключение из этого правила.

Революция нуждалась в ученых, ценила их и дорожила ими. Она была пропитана ароматом научной мысли, как наука этого периода была пропитана политикой. Выражаясь словами Энгельса, высказавшегося о другом аналогичном времени, «это была эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страстности и характеру, по многосторонности и учености. Люди, основавшие современное господство буржуазии, были чем угодно, но только не буржуазно-ограниченными. Наоборот, они были более или менее обвеяны авантюрным характером своего времени. Тогда не было почти ни одного крупного человека, который не... блистал бы в нескольких областях творчества... Люди того времени не стали еще рабами разделения труда, ограничивающее, калечащее действие которого мы так часто наблюдаем на их преемниках. Но что особенно характерно для них, так это то, что они почти все живут всеми интересами своего времени, принимают участие в практической борьбе, становятся на сторону той или иной партии и борются, кто словом и пером, кто мечом, а кто и тем и другим. Отсюда та полнота и сила характера, которая делает из них цельных людей. Кабинетные ученые являлись тогда, исключениями; это либо люди второго и третьего ранга, либо благоразумные филистеры, не желающие обжечь себе пальцев» [1].

---

[1] Ф. Энгельс, Диалектика природы, М.—Л., 1931, стр. 109—110.

С помощью революционных ученых — подлинных сынов этого славного времени — республика организовала свои победы. Прозвище *организатора побед* революционная Франция дала одному из своих крупнейших военачальников — Лазарю Карно, не только стойкому республиканцу, но и талантливому математику и инженеру. «Если, согласно признанию Наполеона, находившегося в изгнании, он утешался там недавними славными победами французских полководцев, то не мешает помнить, что организатором своих побед Франция объявила Лазаря Карно»[1]. И, быть может, биография Карно, создателя четырнадцати революционных армий республики и победителя многочисленных войск коалиции, геометра, инженера, поэта и политика, являющего собой пример «чистейшего представителя строго республиканских настроений, которым он остается верным при всех обстоятельствах» (Ф. Клейн), послужит, в противовес истасканным сплетням о процессе Лавуазье, яркой иллюстрацией того высокого положения науки, которое она занимала в годы народного энтузиазма, могучей социальной ломки и жестокой борьбы за торжество идей Великой французской революции.

2

Стремясь поддержать престиж своего опустившегося рода, отец Лазаря Карно, мелкопоместный дворянин и нотариус бургундского городка Нолэ, воспитывал свое многочисленное потомство так, как это подобало бы знатному графу. Для Лазаря[2], второго по счету сына, была избрана военная карьера, но его математические способности, отмеченные д'Аламбером, когда мальчик учился еще в парижской школе де-Лонгпре, заставили родителей пойти на компромисс: решено

---

[1] Предисловие Планше к книге «Correspondance de Napoléon Bonaparte avec le comte Carnot, ministre de l'intérieur, pendant les cent jours», Paris, 1820, стр. VIII.

[2] Родился 13 мая 1753 г.



Памятник Лазарю Карно в Нолэ

было остановиться на военно-инженерной специальности, так как она давала возможность без потери эполет удовлетворить математическую любознательность юноши. Молодой человек слушал лекции Монжа в Мезьерской военной школе, закончил ее в 1773 г. в чине поручика и был отправлен в старую Пикардию, край крепостей.

Двадцатилетний офицер начал свою военную карьеру, в Калэ, административном центре провинции, под руководством управителя Пикардии принца де-Круа. Получив через короткое время гарнизон в Аррасе, крупнейшем и многолюднейшем городе края, превращенном в первоклассную крепость, Карно воспользовался этим назначением для углубления своих знаний в области крепостной обороны. Эти занятия он сумел совместить с удовлетворением других многообразных своих интересов. Работая над математическими проблемами, он находил время и для литературного творчества, и его шуточные песенки, взрастившие Беранже, распевались далеко за пределами Пикардии. Вместе с тем его не переставали еще со школьной скамьи волновать социально-политические вопросы, стоявшие в центре внимания тогдашней французской интеллигенции; Руссо, Мабли, Рейналь, Гельвеций, д'Аржансон были любимыми авторами молодого офицера, поклонником которых он остался на всю жизнь. Спорт и флирт, вино и карты тоже входили в круг интересов поручика.

Сделавшись членом веселого аррасского кружка «Розати», в котором собирались сливки местной интеллигенции, он сблизился здесь с адвокатом Максимилианом де-Робеспьером, оказавшим большое влияние на политическое развитие талантливого офицера, и аббатом Фуше, интересовавшимся в то время физикой и смежными с ней вопросами. Спустя некоторое время Карно сделался членом аррасской академии наук и искусств, возглавлявшейся Робеспьером, а в 1783 г. (год его производства в капитаны) выступил в печати со своей первой работой «Essai sur les machines en général par un officier du génie», заслужившей впоследствии

лестную оценку Араго. В январе 1784 г. он представил академии наук свой мемуар «о воздухоплавании, а еще через полтора года удостоился первой премии от дижонской академии за написанное для конкурса «Похвальное слово маршалу Вобану», знаменитому инженеру и теоретику крепостной обороны.

В этом произведении, прочитанном в присутствии Генриха Прусского (брата Фридриха Великого), Карно подвергал разбору не столько способы атаки и обороны крепостей, изобретенные маршалом и обогатившие военное искусство, сколько останавливался на изложении социально-политических взглядов Вобана. Карно выступал в своем произведении против завоевательной политики государства и резко критиковал экономический строй королевства; особенно детальному разбору подверг он «Королевскую десятину» — сочинение, за которое Вобан лишился милостей Людовика XIV и которое замалчивалось всеми биографами маршала; более того, Карно не ограничился простым изложением содержания этой работы, но подверг ее критическому рассмотрению и комментированию, сообщая попутно свои крайне радикальные по тому времени выводы; квалифицируя налоговую систему Франции как «варварскую и грабительскую», он требовал устранения того деления общества на праздных и трудящихся, при котором первые, «являясь истинным бременем для народа, становятся полезными только после своей смерти, удобряя землю собственными трупами»; для оздоровления расшатанной экономики французского королевства автор предлагал «*имущества богатых разделить между бедными*».

Можно, конечно, отказать этому произведению, перепевавшему идеи современных автору философов, в оригинальности высказываемых суждений. Но дерзкая смелость Карно, совершавшего одно из ранних открытых публичных выступлений, предшествовавших революции, не могла пройти для него безнаказанно. Впрочем, он был подвергнут наказанию не только за эту антиправительственную демонстра-

цию. К этому же времени относится издание его анонимного памфлета о крепостной обороне, направленного против начальника военно-инженерного корпуса де-Фуркруа. Выпуск этой брошюры, касавшейся специальности корпуса, без предварительной цензуры его командования, поставил автора работы под угрозу репрессии. Де-Фуркруа потребовал немедленной отставки офицера; однако Карно не только не собирался следовать этому требованию, но навлек на себя еще большее недовольство самовольной отлучкой в Дижон, использованной для дуэли, завершившей одну из его любовных историй. Когда Карно возвращается в корпус, его лишают шпаги и отправляют в бетунскую крепостную тюрьму (неподалеку от Арраса).

Но как раз в это время Генрих Прусский предпринял осмотр фортификаций Вобана и, подыскивая себе подходящего консультанта, вспомнил об офицере, читавшем некоторое время назад дижонской академии свое «Похвальное слово маршалу». Правительство Людовика не могло отказать принцу, через которого велись переговоры о заключении франко-прусского союза, в исполнении его просьбы о прикомандировании к нему в качестве спутника Лазаря Карно. Приказ об освобождении офицера сделался известным населению Бетуна. Когда популярный среди местных жителей узник покинул стены тюремного замка, ему была устроена торжественная встреча, закончившаяся, по словам биографов Карно, факельной манифестацией и банкетом в честь освобожденного.

С первых же дней революции Карно делается ее активным участником. Он представляет Национальному собранию свою работу «О восстановлении финансов», организует кампанию протеста в связи с репрессиями королевского правительства против Шампаньского кавалерийского полка и Нансийского гарнизона, отказавшихся выступать против гражданского населения, и добивается амнистии организатора братания поручика Даву и арестованных с ним солдат. Избранный членом полкового комитета, тесно связанного с

левой Учредительного собрания, он вступает вскоре в аррасское общество друзей конституции, а затем делается его президентом. Политическая позиция Карно характеризуется в этот период активной пропагандой за установление во Франции республики (особенно в связи с бегством короля в Варенн); таким образом республиканизм Карно берет свое начало еще в то время, когда Конституанта не заходила дальше мечт об установлении ограниченной монархии, и даже такие люди, как Робеспьер, находились еще в лагере монархистов.

В 1791 г. происходит перемена в личной жизни Карно. Отправившись на свадьбу своего брата в Сент-Омер, маленький городишко вблизи Арраса, он торопит плохо выезженного коня и на крутом повороте неудачно срывается со скачущей лошади. Разбитого наездника переносят в дом военного интенданта Дюпона, тестя его брата-молодожена, и Софи Дюпон, сестра новобрачной, прекрасная музыкантша и заботливая подруга, выхаживает больного в течение нескольких недель. Однажды, полулежа в кресле, выздоравливающий признается Софи: «Я не знаю, как назвать свое отношение к вам, знаю только, что моим чувствам невозможно быть более нежными». Вскоре семья Дюпон отпраздновала вторую свадьбу. Лазарь вернулся в Аррас с женой.

Популярность Карно среди населения Пикардии приобретает к этому времени такие размеры, что становится естественным его избрание депутатом Законодательного собрания, конституирующегося в 1791 г. По приезде в Париж он вступает в члены якобинского клуба[1]. 8 ноября он выдвигает в Законодательном собрании обвинение против эмигрантов и принцев крови в подготовке интервенции, и Собрание издает декрет, грозящий смертью эмигрантам, отказывающимся вернуться во Францию и чинящим против нее заговоры. Однако дальнейшие его выступления, не-

---

[1] K. Fink, L.-N.-M. Carnot, sein Leben und seine Werke, Tübingen, 1894, стр. 10.

приемлемые для подавляющего большинства Легислативы в силу их крайней радикальности, обречены на неудачу. Его предложение разрушить Перпиньянскую цитадель, сделанное в заседании 3 января, отклоняется большинством Собрания, и оратору остается лишь сокрушенно воскликнуть: «Я никак не думал, что, предлагая французам в 1792 г. разрушить очередную Бастилию, буду так плохо встречен в своем предложении». Когда 19 апреля он горячо напал на опубликованный военным министром устав внутренних войск, Собрание отказалось напечатать его речь, не согласившись с доводами Карно. Наконец, позиция Карно в вопросах внешней политики также резко расходилась с позицией большинства Законодательного собрания. Он был одним из шести депутатов, вотировавших 20 апреля против объявления войны, мотивируя свое голосование нежеланием поддержать авторитет короля в случае победоносного конца кампании или ставить под угрозу гибели достижения революции в случае победы коалиции.

Когда же голосование решило вопрос, и Франция отважилась на рискованный поединок, Карно отдал все свои силы борьбе за победу революционной страны. Ибо поражение, по его мнению, означало безусловную гибель завоеваний народа, победа же («меньшее зло»), хотя и упрочила бы пошатнувшееся положение монарха, еще не означала бы крушения всех достижений революции. Он оставил порученную ему Собранием деятельность в дипломатическом комитете и комиссии народного образования, переключился на военную работу и посвятил ей все свое время, знания и энергию. Декретом от 15 мая, принятым Легислативой по его предложению, он усилил пограничную охрану и установил наблюдение за миграцией. В июле, когда обнаружилось, что для волонтеров нехватало вооружения, Карно провел в Собрании предложение о снабжении добровольческих частей пиками, пока удастся создать массовое производство холодного и огнестрельного оружия. В конце того же месяца он поехал в Суассон для воору-

шевления стоявших там войск, в августе посетил с этой же целью Виссембург, Безансон и Страсбург, из Страсбурга выехал в Шалон — место сбора волонтеров, отправлявшихся на фронт. Он приводил к присяге офицеров, смещал ненадежное руководство, воодушевлял армию и вселял в нее патриотический дух.

Выборы в Национальный Конвент застали Лазаря Карно в армии. Население Па-де-Калэ снабдило его новым мандатом в этот высший правительственный институт революционной страны, и уже 23 сентября, в четвертый день работы Конвента, Карно был назначен комиссаром по организации военной обороны Восточно-Пиренейской границы. Отправившись в Тулузу, он успешно выполнил поручение и представил Конвенту подробный отчет, признанный народными представителями «образцом ясности, отчетливости, революционной зоркости и административного искусства»[1]. В числе других депутатов он был послан в армию для объявления республики; он арестовал офицеров, оставшихся верными королю, а в Конвенте требовал бдительности к социальному составу армейских командиров и решительной замены офицеров-дворян офицерами из простого звания. Когда Конвент привлек Людовика к суду, Карно находился в армии; но он приехал к поименному голосованию и, может быть, одним его голосом решилась судьба монарха: он вотировал за казнь Людовика.

В январе 1793 г. Конвент избрал Лазаря Карно членом Комитета общей защиты. Окрыленный первыми успехами армии на фронтах, Карно представил 17 февраля доклад Конвенту о желательных присоединениях некоторых закордонных территорий к французской республике. Предлагая народным представителям присоединить к Франции прежнее княжество Монако, часть бальяжа Шамбурм и некоторые чересполосные владения в пограничных областях, Карно

---

[1] Tissot, Mémoires historiques et militaires sur Carnot, Paris, 1824, стр. 48.

оставался верным своим прежним взглядам на завоевательную политику, высказанным в «Похвальном слове маршалу Вобану». В своем проекте он ставил задачу не завоевывать для Франции дополнительные территории, а помочь братским народам освободиться от феодального гнета путем их добровольного объединения с французской республикой. «Французская нация,— сообщал он в своем докладе,— считает долгом своей чести защищать дело свободы у всех народов, желающих ее добиться... Она делает из этих народов своих союзников в борьбе против международной тирании» [1]. Вместе с тем Карно возражал против всяких аннексий, рассматривая возможность присоединения соседних территорий к Франции только на основе федеративного объединения наций. Ибо «законы французской свободы не повелевают нам отожествлять себя с этими (братскими) народами. Так как право верховного суверенитета принадлежит всем народам, то их слияние и объединение может произойти только на основании свободного и формального договора между ними. Ни один из народов не имеет права подчинять другой своим общим законам без особого на то согласия. Это согласие не может даже лишить их права вернуть себе прежнюю независимость, когда они захотят этого» [2].

В этом докладе Карно заключалось идейное обоснование всей дальнейшей наступательной военной практики французской республики. Революционное правительство, расширяя свою миссию, считало себя призванным освободить от феодального гнета не только французскую нацию, но и пограничные страны. Этим мотивируются и следующие проекты Карно о присоединении к Франции смежных с Лотарингией коммун, Брюсселя и других частей Бельгии.

Но декрет оказался преждевременным. Успехи револю-

---

[1] «Archives parlementaires de 1787 à 1860». Recueil complet des débats législatifs et politiques des chambres françaises, т. 58, стр. 546.

[2] Там же.

ционной армии сменились тяжелым поражением, вызванным изменой Дюмурье. Франция лишается завоеванной Бельгии, а главнокомандующий северным фронтом генерал Дюмурье, вступивший с герцогом Кобургским в переговоры о восстановлении в стране легитимной монархии, начинает молниеносное отступление. Еще не имея доказательств измены генерала, но уже недоумевая перед подозрительным поведением северной армии и тщетно пытаясь получить от генерала какие-либо объяснения, Конвент направляет к нему военного министра Бёрнонвилля и комиссаров Ламарка, Камюса, Банкаля, Кинэ и Карно, чтобы выяснить положение в армии и привлечь Дюмурье к ответственности. Но когда министр и четыре комиссара (пятый — Карно — отстал в пути) являются в Сент-Аман, главную квартиру штаба, и требуют от командующего объяснений, он арестовывает их и передает в руки неприятеля.

Эта весть достигает догоняющего своих товарищей Карно. Наскоро выработав план действий, он едет уже не на квартиру Дюмурье, а бросается в армию, поднимает ее и сообщает об измене генерала. Он увлекает солдат за собой, призывает их к непослушанию продавшемуся начальству и шлет срочные донесения в Конвент о случившемся. Конвент немедленно проводит назначение Карно своим полномочным комиссаром северной и арденской армий, поручая ему организацию обороны оголенной границы. Карно пытается арестовать Дюмурье, выслав для этой цели три батальона во главе с полковником Даву, но генералу удается бежать к неприятелю. Комиссар Конвента развивает бешеную энергию для восстановления порядка в дезорганизованных генералом частях, и ему удается несколько залечить раны, нанесенные северной армии изменой Дюмурье. Но уже 19 мая Конвент отзывает его для новых поручений.

Между тем положение на границах ухудшалось с каждым днем. В то время как побежденные в Париже жирондисты сеяли смуту в провинции, вооружая Нормандию, возбуждая Бордо, поднимая Марсель и действуя, таким образом,

заодно с возмутившимися роялистами Вандеи, Лозеры, Вогезов, Юры и Лиона,— громадная армия австрийцев, голландцев и англичан окружила крепость Кондэ и бомбардировала Валансьен. Пруссаки осаждали Майнц, пьемонтцы угрожали Савойе и Ницце, а испанцы уже почти овладели Руссильоном. Республика стояла на краю гибели. И она погибла бы, если бы ее враги обладали такими творческими силами, какие были в ее распоряжении, если бы нападавшие на нее правительства обладали хоть сотой долей тех дарований, которые проявило якобинское правительство. Оно обладало достаточной верой в свое дело, чтобы заразить революционным энтузиазмом народные массы; оно организовало не имевшие в прошлом примера героические походы голодных, разутых, почти безоружных санкюлотов, похоронившие великолепно вооруженные армии европейской коалиции. Все живые силы страны напряглись. И победа, казавшаяся немыслимой, была обеспечена. Ее душой явился не военный министр, не разудалый рубака и не прославившийся в походах командир,— это был якобинец, член Конвента, человек с красной оперенной шляпой на голове и трехцветной повязкой на груди, военный инженер Лазарь Карно.

Когда Бёрнонвилль был выдан австрийцам, его место занял якобинец Бушотт. Этот человек проявил очень мало военных талантов, и роль его в организации обороны была чрезвычайно незначительной. Заботясь исключительно о том, чтобы в армии был силен дух патриотизма, он очень мало думал о ее боевой готовности. Однако вскоре вся исполнительная власть перешла от министерства к Комитету общественного спасения — выдвинутому революцией высшему правительственному органу в эпоху якобинской диктатуры. В июле 1793 г., когда после падения жирондистов этот Комитет подвергается коренной реорганизации, членами его делаются наиболее энергичные и решительные государственные деятели эпохи, главным образом робеспьеристы. В первой половине августа Комитет пополнился еще двумя

народными представителями, деятельность которых и придала этому правительственному органу всю его важность и значение: это были Робеспьер и Карно.

Своим вхождением в состав правительства Робеспьер сделал его сразу популярным: авторитет *неподкупного* был непререкаем в народе. В лице Лазаря Карно Комитет принял в свой состав талантливейшего военного организатора, а в этом правительство осажденной республики, сотрясавшейся от границы до границы битвами и мятежами, особенно нуждалось. И Карно оправдал надежды Конвента. «Если за свои великие заслуги Карно получил почетное имя *организатора победы*, — пишет В. Блос, — то никто из деятелей революции не заслужил своего почетного имени в большей степени, чем он» [1].

3

Саперный офицер — это офицер без войска, это больше инженер, чем солдат. Получив в Комитете общественного спасения военный портфель, Карно подошел к своему заданию не как воин, а как ученый. Обладая огромными специальными знаниями, острым умом, нечеловеческой усидчивостью, трудолюбием и чрезвычайно ясным взглядом, в котором умение схватывать детали, свойственное математику, сочеталось с почти художественным даром безошибочно охватывать целое, Карно не хотел ничего предоставить случаю. Приступая к своей грандиозной задаче, этот методичный и предусмотрительный человек, воплотивший в себе, подобно своему идеалу — Вобану, лучшие качества французского военного инженерства, хотел все предвидеть и все заранее рассчитать.

Карно начинает с того, что оставляет Париж и объезжает фронты — северный, восточный и южный, чтобы знать, куда

---

[1] В. Блос, История французской революции. Перевод с нем., изд-во «Пролетарий», Харьков, 1923, стр. 161.

следует направить самые большие усилия. Вначале перед ним рисуется план чисто инженерной защиты республики. Потом постепенно этот план видоизменяется и расширяется.

По предложению Карно, отечество объявляется в опасности. Все мужское население призывается к оружию. Создаются сотни волонтерских частей, представляющих надежную опору республики. Увеличив таким образом численность вооруженных сил с 200 000 человек до 1 200 000, Карно организует из них четырнадцать армий, формирует штабы и ставит во главе республиканских войск группу молодых, еще малоизвестных, но верных республике начальников.

Карно имеет зоркий глаз, он умеет оценивать и выбирать людей, он обладает даром распознавания талантов по самому мимолетному их проявлению. Ему достаточно увидеть самого маленького офицера в пылу сражения, и он сразу определяет ему цену. Этой способности Лазаря Карно разбираться в людях Франция в большой мере обязана тем, что во главе ее армии появилась та великолепная плеяда генералов, которая спасла революционную страну от интервенции и понесла французские знамена далеко за ее пределы.

Простой сержант Гош, подшивавший бумаги для пыльного архива, написал Лазарю Карно докладную записку «о средствах прорыва неприятельского фронта на севере» Карно определил: «этот сержант проложит себе дорогу»; и сержант благодаря проницательности своего начальника в несколько месяцев проделал карьеру капитана, полковника, бригадного генерала, дивизионного командира, главнокомандующего... Карно «нашел» талантливого Журдана, руководил его первыми выступлениями и проложил ему путь к успеху. Он освежил социальный состав командного персонала, но вместе с тем стремился привлечь и сохранить для революции наиболее талантливых специалистов из аристократической среды (Монталамбера и др.).

Армия терпела лишения и нужду в снаряжении, обуви, одежде, оружии. Карно обратился за помощью к ученым и добился быстрых успехов. Недоставало чистой меди; Карно

предложил Конвенту искать ее в монастырских и церковных колоколах,— и дефицит в металле был покрыт. Нехватало селитры для выделки пороха; Монж посоветовал Карно искать ее в погребах и подземельях, — и почва Франции открыла свои сокровища для войска. Солдаты были разуты, а изготовление обуви требовало целых годов; на помощь пришла наука, и годы превратились в дни. Фабрикация оружия замедлялась мелочными кустарными работами; механические средства и усовершенствования, предложенные учеными и инженерами, ускорили производственный процесс, и армия перестала испытывать нужду в вооружении. Национализированные монастыри были превращены в оружейные заводы. Оружейники из Мобежа устроились в Шартрезском монастыре, «и это помещение,— говорит Карно,— в котором раньше царствовали тишина, безделие, тоска, печаль и скука, наполнилось стуком молотков и представило яркую картину полезной активности». Карно добился введения в этих мастерских такой сдельной оплаты за труд, что весь заработок оружейных заводов распределялся среди работавших на них рабочих, и «такая организация мастерских,— по его словам,— благоприятствовала равенству, освобождая рабочих, у которых прежде не было собственных мастерских, от власти тех, кого они раньше называли хозяевами;...здесь они — у себя, и сами стали хозяевами»[1]. 3 ноября 1793 г. были уже выпущены первые ружья республиканского производства. Карно первый использовал авиацию для военных целей: по его совету генерал Морло поднялся к облакам и высмотрел оттуда маневры неприятеля под Флерюсом. При его участии

---

[1] Последнее утверждение нельзя, впрочем, принимать на веру, ибо сам Карно жаловался, что контрреволюционеры в красных колпаках пытались проникнуть в среду оружейных рабочих и что некоторыми из них, впоследствии арестованными, были сделаны попытки вызвать среди рабочих забастовки, «пробуждая в них чувство жадности, подавляющее республиканские чувства»; но, сообщает Карно, все эти маневры были своевременно раскрыты и предупреждены (см. у М а т ь е з а, Как побеждала франц. революция, стр. 103).

была впервые использована идея оптического телеграфа для целей централизованного руководства военными действиями.

Когда Карно начинал свою работу в Комитете, армия представляла жалкий малочисленный сброд, опустошавшийся изо дня в день в силу полного отсутствия дисциплины, массового дезертирства, плохого снабжения, недостатков организации и ненадежного руководства. За короткое время Карно сумел превратить армию в крепко спаянное целое, в боевую силу, укрепленную организацией и непобедимую по духу патриотизма.

Но Карно был не только организатором в собственном смысле этого слова. Его военная деятельность была значительно шире.

Сидя в своем кабинете, обложенный картами и чертежами, Карно задумал и провел в жизнь серьезнейшую реформу военного искусства. Господствовавшие до него стратегия и тактика были унаследованы от семилетней войны. Основой этой тактики был методический маневр. Обстановка, в которую был поставлен Карно, заставляла его искать новых методов ведения войны. Он с первых же дней своей работы дал себе отчет в том, что с его второпях набранными, почти невооруженными, голодными и полураздетыми волонтерами нельзя было вести такую планомерную и систематическую войну, как со старыми, хорошо обученными и дисциплинированными войсками. Но, с другой стороны Карно считал, что его плохо дисциплинированные и слабо обученные войска обладают таким преимуществом, которого недоставало у неприятельских армий,— революционным порывом, огромным запасом творческих сил.

Этого не понимали старые генералы, руководившие армией до Карно. Изменник Дюмурье, когда он еще командовал северной армией, частенько негодовал по поводу развала в войсках. Он презирал волонтерские части, считая их ненадежными. Кюстин, Гушар и другие военачальники держались того же мнения о боеспособности новоиспеченных революционных частей. Лазарю Карно было чуждо это

неверие в силы республиканских армий. Наоборот, он решил опереться именно на новые отряды рекрутов, на сотни тысяч волонтеров, призванных для спасения отечества. Но он понимал, что это воинство требует совершенно новой тактики, совершенно новой стратегии, где бы основное преимущество революционной армии — ее несокрушимый порыв, пламенный энтузиазм — было целиком использовано. И он нашел новую тактику и новую стратегию.

В одном из своих докладов Комитету Карно формулировал сущность назревавшей в его сознании реформы военного дела следующим образом:

«Нужно, — говорил он, — уравновесить искусство количеством и вести войну массами людей: направлять в пункты атаки столько войск и артиллерии, сколько можно собрать; требовать, чтобы генералы находились постоянно во главе солдат, чтобы они давали им пример мужества и самопожертвования; приучить тех и других никогда не считать численности неприятеля, а бросаться на него, очертя голову со штыком наперевес, не думая ни о перестрелке, ни о маневрировании, к которому нынешние французские солдаты совершенно не приучены и не подготовлены» [1].

2 февраля 1794 г. Карно формулировал свою доктрину в знаменитой инструкции, которой позже руководствовались Наполеон и Мольтке. В этой инструкции Карно сообщал:

«Общее правило — это действовать массами и всегда наступательно; поддерживать в войсках строгую дисциплину, всегда держать войска наготове, оставлять на местах лишь такое количество войск, которое абсолютно необходимо для охраны; производить частые смены в гарнизонах и в штабах, дабы предотвратить возможность всяких козней, которые могут завязаться в одном месте в силу долгого пребывания в нем, что создает возможность измены и пре-

---

[1] А. К. Дживилегов, Армия Великой французской революции и ее вожди, изд-во «Книга», М.—Пг., 1923, стр. 68.

дательства; иметь бдительное наблюдение за охраной постов обязывать старших офицеров посещать посты как можно чаще; использовывать каждый случай для штыкового боя и беспрерывно преследовать неприятеля до полного его уничтожения» [1].

Словом, основой тактики Карно было безостановочное наступление глубокими колоннами. Наступлению предшествовала энергичная артиллерийская подготовка, после чего батальон за батальоном бросался на решающий участок боя.

Такая тактика была связана с огромными потерями людского состава, но в эти годы человеческая жизнь ценилась очень мало. Никто не считал смертей ни в тылу, ни на фронте. Вдовушка Луизетта косила в стране, Марс сбирал свою жатву на границе. Все приносилось на алтарь победы. Воодушевленная армия рвалась в бой, презирая смерть. Гимн марсельских федератов, гимн Руже де-Лилля, отказавшегося, по иронии судьбы, служить революции и бросившего Лазарю Карно, как кровожадному убийце короля, свои эполеты, совершал чудеса. Когда гремела марсельеза и солдаты видели впереди себя трехцветный шарф и генеральский плюмаж, они бросались за командиром в огонь, сокрушая на своем пути неприятеля. «Они давали каждый бой так, как будто он должен был быть решающим, они делали каждое усилие так, как будто оно должно было быть последним» [2]. — И факты показали, что Карно судил верно: его новая революционная тактика несла спасение республике.

Карно оказался не только блестящим тактиком, но и талантливым стратегом. Учитывая большие трудности, связанные с пользованием сложными маневрами в его наскоро сколоченной, нерегулярной армии, он решил заменить искусство маневрирования быстротой передвижения. В основу стратегии Карно, получившей свое дальнейшее развитие в руках Бонапарта, ложилась задача: использовать разделение не-

---

[1] Матьез, Как побеждала французская революция, стр. 140.
[2] Там же, стр. 141.

приятельских сил и стремиться быть в каждом данном случае сильнее отдельных групп неприятельских армий, хотя бы общая численность неприятеля была больше.

Этой новой тактикой, этой новой стратегией и своей героической, талантливой организационной работой Лазарь Карно обеспечил победу республике. Запершись в своем кабинете, обложившись картами и донесениями, он вырабатывал новые и новые планы военных операций, отдавая все свои силы этой всепоглощающей революционной работе. Он проводил в Комитете целые сутки, работая по шестнадцать, восемнадцать, двадцать часов ежедневно. Он забросил дом и семью, не видя ее целыми неделями, и с головой ушел в порученные ему задачи. Ему нехватало времени даже для обеда, и он закусывал тут же, среди бумаг и чертежей, куском хлеба, запивая его лимонадом или, чтобы рассеять одолевающий сон, чашкой кофе — «черного, как дьявол, горячего, как ад, чистого, как ангел, и сладкого, как любовь». В этом кабинете сходились нити со всех концов четырнадцати революционных армий. Изучение архивов Комитета общественного спасения показывает, что все декреты и вся переписка по военным операциям были делом одного лишь Лазаря Карно, если не считать совершенно технической роли Приёра де-ла-Кот д'Ор и Жанбона Сент-Андре, руководившего, впрочем, морскими операциями. «Собственной рукой писал Карно приказания всем генералам, давал подробнейшие наставления на все случаи; его планы, например, сообщенные Пишегрю 21 вантоза II года, походят на пророчества. Все его предсказания сбылись; историк памятной кампании 1794 г. может найти все пункты, указанные его инструкциями главнокомандующему: здесь надо дать сражение, а там ограничиться одними демонстрациями; сила каждого гарнизона, каждого поста определена с удивительной точностью. По приказанию Карно Гош скрывается от прусской армии, переходит Вогезы, соединяется с рейнской армией, и Вурмзеру наносит решительный удар, освободивший Эльзас. В 1793 г. неприятель, ожидая, что по

классическим правилам стратегии французские войска пойдут с Мозеля на Рейн, собрал на этой реке грозную силу; Карно, не заботясь о старых теориях, неожиданно отделил 40 000 от мозельской армии и послал их форсированным маршем на Маас. Это знаменитое распоряжение решило успех кампании 1793 г., в которой австрийские и голландские генералы имели несчастье терпеть поражения, несмотря на точнейшее выполнение всех правил военного искусства»[1]. Так руководил Карно из своего кабинета ответственнейшей кампанией.

Но бывали случаи, правда, нечастые, когда Карно отрывался от своей кабинетной работы. Это было в первые дни его деятельности в Комитете общественного спасения, когда армия особенно нуждалась в заражающих личных примерах. Когда генерал Гушар, главнокомандующий северной армией, оказался не в состоянии сообразовать свои действия с точными указаниями Карно, последний тайком оставил Париж и поспешил на фронт. Он сместил Гушара и назначил на его место молодого неопытного Журдана. Это было в тот момент, когда от судьбы Мобежа, осажденного австрийцами, зявисела судьба революционной столицы: взяв эту крепость, принц Кобургский не встретил бы препятствий до самого Парижа. И чтобы не повторилось того же, что было с Гушаром, Карно решил сопровождать нового главнокомандующего в важном выступлении. Вместе с ним командовал Карно в решительном сражении 26 вандемьера II года (17 октября 1793 г.) при деревне Ваттиньи, распоряжался, как верховный начальник, а затем, когда, передав командование Журдану, увидел, что французские колонны начали отступать, схватил в пылу воодушевления ружье и, как рядовой лейтенант, повел солдат в новую атаку, закончившуюся полной победой. А на другой день, когда все было

---

[1] Ф. Араго, Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Перевод Д. Перевощикова, т. I, СПб., 1859, стр. 447.

кончено, когда враг отступил и стратегическая задача была блестяще разрешена, Карно, как ни в чем не бывало, возвращается в Париж, отдавая всю славу громкой победы своему выдвиженцу Журдану.

В другой раз он отправляется в Дюнкирхен, приводит его в оборонительное состояние, а потом производит неожиданную вылазку и отбивает у англичан город Фюрнез. И как в бою при Ваттиньи, Карно, чтобы воодушевить солдат, сражается и в этой битве, как рядовой, с ружьем в первых рядах.

Но эти два примера, иллюстрируя личный героизм Карно, не рисуют характера его основной работы. Роль Карно заключалась в систематическом руководстве всеми военными операциями революционных войск. Он должен был не только одерживать победы на внешних фронтах, но и ликвидировать внутренние мятежи. В последние месяцы 1793 г. и в первые месяцы 1794 г. Карно руководит осадой Лиона и подавлением Вандейского мятежа. Он выступает и как трибун, увлекая армию своими призывами к новым победам. Его воззвания могут служить образцом республиканского красноречия, воодушевлявшего патриотических воинов страны. «Революционные солдаты! — пишет он в своем приказе по армии 4 брюмера II года (25 октября 1793 г.), — трусливые сателлиты тирании бежали от вас. При вашем приближении они покинули Дюнкирхен и свою артиллерию; они поспешили избегнуть окончательного разгрома, поставив реку Самбру между собою и вашими победоносными фалангами. В Лионе федерализму нанесен сокрушительный удар. Чтобы окончательно прикончить его, республиканская армия вступила в Бордо. Пьемонтцы и испанцы изгнаны с нашей территории. Защитники республики разрушили притоны мятежников в Вандее: они истребили их нечестивые когорты. Эта преступная земля сама поглотила тех чудовищ, которых она произвела на свет; остальные падут жертвами народного гнева. Везде, где тирания не встретила измены, победа сопровождала достойных сынов свободы, и гений француз-

ского народа восторжествовал... Бьет последний час тиранов, и они должны погибнуть от ваших рук. Республиканские солдаты! Души загубленных братьев ваших взывают к вам, слава зовет вас, родина смотрит на вас, представители нации ободряют вас и руководят вами. Ступайте! Карайте! Пусть через месяц французский народ будет отомщен, свобода упрочена. Республика будет победительницей! Пусть тираны и рабы исчезнут с лица земли! Да останутся на ней лишь справедливость, счастье и добродетель!»

Через семнадцать месяцев комитетской деятельности Карно Франция справилась со всеми многочисленными противниками и была свободна. Карно выпустил по этому поводу отчет о военных действиях, в котором значилось «27 больших побед, 120 менее значительных, 80 000 убитых неприятелей, 91 000 пленных, 116 завоеванных крепостей и городов, 230 захваченных фортов и редутов, 3800 взятых у неприятеля пушек, 70 000 ружей, 90 знамен и около 2 000 000 фунтов пороха».

Огромные услуги, оказанные Лазарем Карно осажденной республике, были по достоинству оценены современниками, закрепившими за аррасским якобинцем почетное прозвище *организатора победы*. Позднее, в эпоху термидорианской реакции, когда враги Карно потребуют над ним суда за участие в террористической политике робеспьерианского правительства, воспоминание об этих заслугах спасет ему жизнь.

4

Участие Карно в террористической практике якобинского правительства рисуется в смутных и очень неопределенных очертаниях. В то время как термидорианский Конвент обвинял *организатора победы* в террористическом сообщничестве с Робеспьером, большинство историков революции категорически снимает с Карно ответственность за политику Комитета, утверждая, что он стоял в стороне от террора. Карно изображается узким военным специалистом, оставав-

шимся чуждым трагической борьбе партий, «тружеником» среди политиков, может быть, не противоборствовавшим Робеспьеру, но уж во всяком случае никакого участия в решении политических вопросов не принимавшим.

Подписи, данные Лазарем Карно под многими смертными приговорами, объясняются, по мнению этих историков, исключительно его колоссальной перегрузкой; человек не замечал, что́ он подписывает. «Ибо,— пишет Тэн,— при необходимости решать ежедневно 400 или 500 дел физически невозможно было бы читать все и голосовать по каждому поводу» [1].

Эту легенду об аполитичности Карно и его непричастности к террористическому режиму окончательно разрушил Альфонс Олар. Мы можем теперь доказательно утверждать, что Карно был лучше своей репутации, пущенной в ход им самим, чтобы избавиться от мести термидорианцев.

3 жерминаля III года, спустя восемь месяцев после падения Робеспьера, Карно доказывал задним числом с трибуны термидорианского Конвента, что в Комитете общественного спасения существовало деление его членов на *тружеников* и *политиков*; при этом самому себе он приписывал роль патриота, согласившегося, «скрепя сердце», заседать с Робеспьером, чтобы спасти республику своими военными планами, а вовсе не для того, чтобы участвовать в общей политике Комитета.

Это выступление делалось в тот момент, когда несколько членов Комитета привлекались к ответственности за свою террористическую деятельность. Преследованию подвергались тогда только три члена Комитета — Барер, Колло д'Эрбуа и Билльо-Варенн. Но и все остальные — Карно, Линдэ, Приёр и др., хотя и не сидели на скамье подсудимых, чувствовали себя в неменьшей опасности, так что, защищая привлеченных к ответственности, они, по существу, сами

---

[1] Ипп. Тэн, Происхождение современной Франции. Перевод под ред. Я. Швырова, т. IV, СПб., 1907, стр. 119.

стремились избежать суда. Таким образом, говоря в пользу обвиняемых и явно фальсифицируя в их пользу факты, Карно в действительности очень искусно оправдывал и выгораживал самого себя. Его выступление было не речью защитника, а защитой обвиняемого.

Именно в этой речи, говоря об ответственности каждого из членов Комитета общественного спасения, Карно коснулся вопроса о подписях, заявив при этом следующее:

«Подписи, дававшиеся бывшими членами Комитета (я говорю о второй и третьей подписи), были формальностью, предписанной законом, но не имевшей абсолютно никакого значения по отношению к тому, кто обязан был выполнять ее. Это не означало с его стороны прямого согласия или даже одобрения по доверию. Подписи эти не были, наконец, даже простым *удостоверением верности с подлинником*, так как это все-таки предполагало бы, что подписавшийся читал и слушал, чего не было в действительности. Эти подписи всегда были лишь простым скреплением бумаг, чисто механической операцией, ничего не доказывавшей, кроме разве того, что докладчик, т. е. первый подписавший подлинную бумагу, выполнил предписанную законом формальность и представил эту бумагу на рассмотрение Комитета» [1].

Вероятно, с целью застраховать себя на случай какой-нибудь улики Карно, выступая через три дня после этого с дополнительными доводами в пользу своей теории вторых и третьих подписей, как бы случайно вспоминает забавный анекдот и сообщает, что он сам, не ведая, что подписывает, дал приказ об аресте двух своих технических работников. Происходило это, по словам Карно, в силу нечеловеческой перегруженности членов Комитета и скопления множества дел, детальное рассмотрение которых было не под силу

---

1 А. Олар, Политическая история французской революции. Перевод с франц. Н. Кончевской. 3-е издание, Птг., 1918, стр. 232.

небольшому коллективу членов правительства. «Если установить эту основу для определения ответственности,— заканчивает свою речь Карно,— то большинство обвинений, направленных против подсудимых (Билльо-Варенна, Колло д'Эрбуа и Барера), падают сами собой; преступления остаются за теми, кто их совершил,— за триумвиратом, который вы наказали 10 термидора» [1].

Предприняв детальное исследование бумаг Комитета общественного спасения, Альфонс Олар полностью опроверг эту, ставшую классической, теорию подписей и ответственности членов робеспьерианского Комитета:

«Без сомнения,— пишет Олар,— официальные предписания о выполнении постановлений Комитета снабжены подписями, представляющими собой простые удостоверения *верности с подлинником*, или *скрепы*, не налагающими никакой ответственности на подписывавших эти предписания. Никто из знакомых с делом лиц не мог ни тогда, ни после ставить их в вину Карно; как настоящий адвокат, он защищался в том, в чем его никто не обвинял, или, скорее, он прибег просто к уловке, когда называл *вторыми подписями* подписи, бывшие не более как простым удостоверением *верности с подлинником*. Действительная ответственность, как это хорошо знал сам Карно, падала на того, кто редактировал или подписывал *подлинные* постановления,— все равно, шло ли дело о *первой* подписи самого автора постановления, или о второй подписи лица, давшего свое согласие на постановление, редактированное другим. Это и был тот щекотливый пункт, в котором Карно чувствовал себя наиболее уязвимым, причем, так как он защищал свою голову, то вполне извинительно, что он старался обойти этот пункт забавными анекдотами вроде рассказа о своих секретарях, которых он приказал арестовать, сам не зная того» [2].

---

[1] А. Олар, цит. соч., стр. 232.

[2] Там же, стр. 233. По поводу этого «анекдота» Олар замечает: «Вовсе не достоверно, чтобы Карно дал эту подпись

«Я имел в руках, — продолжает Олар, — все бумаги Комитета общественного спасения и, как я думаю, все подлинники постановлений, хранящиеся в архивах; и я не видал ни одного постановления, которое касалось бы общей политики и подписи под которым могли бы казаться данными по неведению».

В другой своей работе Олар приводит одно из самых знаменитых постановлений —приказ об аресте Дантона, Камилла Демулена, Делакруа и Филиппо [1], снимок с которого мы здесь помещаем (факсимиле I). Можно ли допустить хоть на миг, что Карно, подписавший указанное постановление, совершил это по неведению?

«Он считал,— отвечает Олар,— что от мешающей оппозиции необходимо освободиться, даже, если это потребно, при помощи эшафота, и подписал этот приказ с несомненной целью погубить Дантона и его единомышленников» [2].

по неведению. Это постановление находится в Национальном архиве; из него видно, что эти два молодых человека, выпив лишнее за обедом, стали шуметь на собрании одной секции и угрожать присутствующим на нем гильотиной. Карно подписал приказ об их аресте, и его нельзя порицать за это» (там же).

[1] Текст этого приказа воспроизводится и в одном русском издании («Революционное правительство в эпоху Конвента». Сборник документов и материалов под ред. Н. М Лукина, М., 1927, стр. 567). Приказ этот, подписанный 10 жерминаля II года (30 марта 1794 г.), гласит: «Комитеты общественного спасения и общественной безопасности постановляют арестовать членов Национального Конвента Дантона, Делакруа (из департамента Эр и Луары), Камилла Демулена и Филиппо и отвести их в Люксембургскую тюрьму в строгое одиночное заключение; мэру Парижа поручается немедленно привести в исполнение это постановление». Подписи под этим приказом следуют в таком порядке: Билльо-Варенн, Вадье, Карно, Леба, Луи (с Нижнего Рейна), Колло д'Эрбуа, Сен-Жюст, Жаго, Приёр, Кутон, Барер, Дюбарран, Вуллан, Эли Лакост, М. Байль, Амар, Робеспьер, Лавиконтери.

[2] A. Aulard, Etudes et leçons sur la Révolution Française. 1-ère série. 4-me édition, Paris, 1905, стр. 198.



Факсимиле I

Интересно отметить, что подпись одного из членов Комитета, Робера Лендэ, отсутствует в этом приказе, и тут следует объяснить причину отсутствия этой подписи. Лендэ не подписал это постановление именно потому, что выступил с заявлением о своем отказе одобрить применявшуюся к Дантону меру, а вовсе не потому, что не пожелал удостоверить «подлинность» приказа, как это должно было следовать из самозащитной теории Карно. «В действительности,—утверждает Олар,—между членами Комитета об-

Enreg. ... 9 7bre 1793

les représentants du peuple composant le comité de salut public arrêtent que les ~~citoyens ligonier~~ ci-devant généraux ligonier et quétineau seront mis sans délai en état d'arrestation et chargent le ministre de la guerre de l'exécution du présent arrêté

paris le 9 7bre 1793 l'an 2 de la rep. une et ind.

a expédier Robespierre

Факсимиле II

щественного спасения существовала политическая солидарность»[1].

Достаточно привести еще пару, другую примеров об арестах, чтобы окончательно развенчать легенду о «*труженической*» роли Карно в Комитете. Одним из наиболее ярких доказательных примеров может послужить приказ от 9 сентября 1793 г. об аресте Лейконье и Квейтино (факсимиле II):

[1] А. Олар, Политическая история французской революции, стр. 233.

приказ написан рукой Лазаря Карно и подписан Робеспьером. «Что может убедительнее доказывать сообщничество этих двух якобинцев в серьезнейшей для революции обстановке?» — говорит по поводу этого приказа Альфонс Олар [1].

Еще перед этим Карно, не колеблясь, подписал приказ об аресте своего коллеги по Комитету — Эро де-Сешеля, обвиненного в измене (факсимиле III) [2]. Его рука не дрогнула при подписывании приказа о казни Люсиль Демулен, жены незадолго перед этим казненного Камилла Демулена.

Укажем также на приказ об аресте Шометта, написанный рукой Робеспьера и подписанный Лазарем Карно и другими членами Комитета общественного спасения (факсимиле IV). 13 жерминаля Карно подписывает приказ об аресте министра иностранных дел Дефорга.

Наконец, среди постановлений, которые Карно не составлял *и не подписывал, но к которым имел самое непосред*ственное отношение, небезынтересен приказ об аресте генерала Виктора де-Брогли, составленный Билльо-Варенном и подписанный тремя членами Комитета общественного спасения — Колло д'Эрбуа, Барером и Приёром. То обстоятельство, что Карно не подписал этого приказа, не умаляет степени его участия в репрессии против Виктора де-Брогли. Ибо Карно написал общественному обвинителю Фукье-Тенвиллю следующее письмо:

---

[1] A. Aulard, Etudes et leçons, стр. 197.

[2] Ввиду того, что факсимиле это крайне неразборчиво, приводим перевод приказа: «25 вантоза II года. Французская республика, единая и неделимая.— Комитеты общественного спасения и общественной безопасности информированы секцией Лепелетье, что некий, давно разыскиваемый гражданин найден на квартире Эро де-Сешеля, депутата Конвента. Принимая во внимание важность этого сообщения и подозрительность поведения Эро, комитеты постановляют арестовать его и всех проживающих с ним, с заключением их в Люксембургскую тюрьму и с наложением печатей на их бумаги». Подписи под приказом следуют в таком порядке: Дюбарран, Барер, Колло д'Эрбуа, Карно, Вулан, Кутон, Робеспьер, Давид, Жаго, Билльо-Варенн, Сен-Жюст.

Факсимиле III.

26

Les comités de salut public et de sûreté générale arrêtent que Chaumette, agent national de la commune, sera mis en état d'arrestation et les scellés seront apposés sur les papiers.

Paris le 23 ventôse l'an 2 de la république

Robespierre

B. Barère

Collot d'Herbois

Carnot

C. A. Prieur

Dubarran

Amar

Vadier

Voulland

M. Bayle

Факсимиле IV

«Гражданин»!

Я свидетельствую тебе, что когда Законодательное собрание направило меня вместе с моими коллегами, Риттером и Приёром, в качестве комиссара в Рейнскую армию после 10 августа 1792 г. для объявления событий этого дня и разъяснения их причин, а также для принятия мер против нежелательных последствий, которые могли проистечь вследствие недоброжелательного отношения командного состава армии к республике,— мы встретились в Виссембурге с Виктором Брогли, который не только отказался подчиняться нашим требованиям, но который не упустил ни одного способа подлости, нахальства и интриги, чтобы поднять армию и городские власти против низложившего власть тирании Собрания и его комиссаров, что принудило нас, не медля, отрешить Виктора Брогли от его должности.

Карно.

29 прериаля II года Единой и неделимой республики»[1].

Пожалуй, хватит цитат и документов!— Несомненно, среди людей, заседавших вокруг стола в павильоне Флориды, Карно не был средним человеком, которого легенда отделила от соратников. Несомненно, Карно участвовал в террористической практике якобинского правительства, и его речь в термидорианском Конвенте носила характер простого отпирательства. Конечно, эта речь не является выигрышным фактом биографии Карно, но из песни слова не выкинешь. Обычно прямой и честный, здесь Карно лгал, чтобы выгородить, с одной стороны, себя, а с другой — сидевших на скамье подсудимых Билльо-Варенна, Колло д'Эрбуа и Барера, тоже зачисленных им в разряд *тружеников* (!),— и это служит объясняющим поведение Карно мотивом. Следует только удивляться, что эта простая уловка так долго преподносилась историками как непреложный факт.

То обстоятельство, что Карно, в общем и целом, разделял политику Робеспьера, Кутона и Сен-Жюста, не свидетельствует, однако, об отсутствии разногласий у этих людей. Иногда споры принимали у них довольно резкий и грубый характер. Упрямый и несговорчивый, Карно понемногу от-

---

[1] A. Aulard, Etudes et leçons, стр. 200.

ходил от триумвирата. В конце концов, отношения между Карно и Сен-Жюстом, а затем и Робеспьером сделались довольно холодными и натянутыми, чтобы не сказать враждебными. Можно, однако, утверждать, что в перевороте 9 термидора Карно непосредственного участия не принимал. Однако он и не держал сторону *неподкупного*. Уже после переворота был пущен слух, может быть, самим Карно, что в целях лишения триумвирата вооруженной поддержки он заблаговременно распорядился отправить из Парижа артиллерийские части, сочувствовавшие робеспьеристам, в Саблонский лагерь[1]. Факт этот, однако, мало вероятен: трудно поверить, чтобы, совершая переброску войск, Карно, не способный ни к какого рода козням, задавался фракционными целями,—тем более, что в Париже 9 термидора оставались верные Робеспьеру гражданские части под начальством Анрио. Возможно, что, не принимая в перевороте личного участия, Карно все же догадывался, а может быть, и знал, о заговоре против триумвирата, и тогда не исключена его объективно двурушническая позиция в этом деле... Впоследствии он не раз с глубокой горечью будет вспоминать о гибели якобинских вождей.

Хотел ли Карно свержения Робеспьера? — «Все, что нам известно об отношении этих двух революционеров, — сообщает Олар, — говорит о безукоризненном отношении Карно к *неподкупному*. Во всех крупных принципиальных вопросах они являются единомышленниками, и всякий раз, когда Робеспьер предлагает какое-нибудь важное правительственное мероприятие, он всегда находит поддержку в лице Карно. При этом на поведение Карно отнюдь не действуют какие-либо привходящие обстоятельства. Его помощь Робеспьеру всегда базируется на твердом внутреннем убеждении, что предлагаемое *неподкупным* мероприятие полезно. Вместе с Робеспьером Карно был убежден в полезности террористического режима в тяжелый для революции

[1] См., например, в книге С. М о н о с о в а, Якобинский клуб, изд-во «Пролетарий», 1925, стр. 70.

момент и подписывал жестокие приговоры. Но, всегда самостоятельный, потом, когда он заподозрил Робеспьера в стремлении к личной диктатуре, он (за несколько дней до переворота), со всей присущей ему прямолинейностью, бросил Робеспьеру в присутствии всего состава Комитета такие жестокие обвинения, что заставил его плакать. Несмотря на это, его нельзя назвать умеренным республиканцем. В основном политика робеспьерианского Комитета разделялась им» [1].

Термидорианские события выбили из колеи и дезориентировали всегда спокойного и умевшего держать себя в руках Карно. И он, обычно такой бесстрашный и прямолинейный, на этот раз сплоховал. Мужество изменило ему, и, подобно своим уцелевшим коллегам, он в угаре самосохранения стремился забросать себя грязью, лишь бы отмежеваться от своих вчерашних соратников, сложивших головы под ножом гильотины. Он даже не брезговал ролью глашатая осквернивших революцию событий и выпросил для себя у Конвента миссию объявить войскам, что «национальное представительство освободило Францию от современных Катилин». Неискренность этого заявления свидетельствуется Пашем [2].

Подавленный и растерянный, Карно проявил в эту пору немало беспринципности. И все же он не был в состоянии зачеркнуть свое прошлое, он не мог убедить Конвент в своей непричастности к политике робеспьерианского правительства. В лучшем случае ему удается изобразить свое участие в Комитете общественного спасения ролью непротивленца злу. 9 прериаля III года он чуть было не попал в беду по доносу жирондиста Ларивьера. «Не мешать преступлению — это значит совершить его», — мотивировал Ларивьер свое требование об отдаче Карно под суд. Карно, еще несколько времени назад строивший хорошую мину при защите Колло и Билльо, теперь поддался. Он оправдывался перед Конвентом довольно неумело, каррикатурно

---

[1] A. Aulard, Etudes et leçons, стр. 207.

[2] Pache, Sur les Factions et les partes, les conspirations et les conjurations et sur celles a l'ordre du jour. Paris, an V.

расписывал свою невероятную доверчивость и вообще ссылался на смягчающие обстоятельства. Смертоносная Гвиана уже рисовалась его глазам, когда какой-то депутат Конвента спас его знаменитой фразой:

— Нельзя судить организатора победы...

Эта слава оградителя Франции от нашествия интервентов, как спасательный круг, удерживает Карно от падения на дно. Благодаря своим заслугам, не могущим быть вычеркнутыми из списка, ему удается продержаться на поверхности политической жизни в первые годы разгула термидорианской реакции. Более того, слава *организатора победы* помогает ему снова подняться на некоторое время на самую вершину государственной власти.

Когда 26 октября 1795 г. Конвент прекращает свое существование, Карно, избранный четырнадцатью департаментами, получает место в Совете старейшин, а после отставки члена Директории Сиейса избирается кандидатом, а затем членом Директории французской республики.

5

И снова военная область делается уделом работы Карно. Он реорганизует военное управление, перестраивает систему военного образования и руководит действиями армии на границах.

В Германии, Вандее, на Рейне он отдает армии в распоряжение полководцев, уже прославившихся громкими победами: у Самбры и Мааса орудует Журдан, у Мозеля и Рейна — Моро, в Вандее — Лазарь Гош. Но армию итальянскую Карно вверяет двадцатипятилетнему генералу, оказавшему некоторые услуги при осаде Тулона и при усмирении парижских секций 13 вандемьера III года в стычках на Понт-Рояле, в улице Сент-Оноре и на крыльце Сент-Роша. Именно Карно «нашел» и выдвинул молодого Бонапарта, как в свое время прославил Гоша, Журдана и других полководцев. Он наметил вместе с Бонапартом блестящий план



Лазарь Карно, президент Директории

итальянского похода, руководя из Парижа этим знаменитым триумфальным шествием французской армии.

В славе Бонапарта померк ореол многих героев эпохи, и мало кто знает об истинном руководителе этой знаменитой кампании. Между тем на судьбы итальянского похода от начала до конца влиял Карно, что можно установить документально. Например, 10 флореаля IV года Бонапарт писал директору Карно из своей главной квартиры в Чераско:

«Прекращение военных действий между мной и королем сардинским позволяет мне посылать курьеров к вам прямо через Турин; я сумею поэтому быстрее получать ваши приказания и, своевременно узнавая ваши намерения, действовать без промедления».

А через несколько дней, 2 прериаля, Карно писал Бонапарту:

«Атакуйте Больё, пока он не успел соединиться с направленными к нему подкреплениями. Всячески старайтесь помешать этому соединению. А самое главное—не разделяйте вашей армии; остерегайтесь, чтобы Больё не побил отдельных ваших отрядов. Ни в коем случае не давайте ему возможности захватить обратно какую-либо из потерянных им позиций. Когда Больё будет окончательно разбит, вы сделаете экспедицию в Ливорно... Директория желает, чтобы армия перешла в Тироль после экспедиции в южную Италию».

Такими письмами, регулярно посылавшимися Бонапарту направлялся ход итальянской кампании. Карно вновь окунулся в родную стихию, не отрываясь от нее даже тогда, когда ему приходилось занимать пост президента Директории (в апреле — июле 1796 г. и в мае — августе 1797 г.).

Он оправился от того состояния растерянности и слабоволия, которое принес ему термидорианский переворот, и снова превратился в прежнего самостоятельного, неподатливого, прямолинейного Карно. Он непохож на своих коллег, остальных директоров республики — ни на развращенного Барраса, ни на корыстолюбивого Ревбелля, ни на надменного Ларевельера-Лепо, ни на Летурнера. И живет он совсем не так, как эти некоронованные правители Франции. В его доме, как и в годы якобинской диктатуры, царит

простота и скромность, и Карно фамильярно приглашает друзей «похлебать супу; за стол садятся между $4^1/_2$ и 5 часами, и я всегда обедаю дома» [1]. В семье у него фамильная радость — родился первый ребенок: маленькому Сади суждено, как и его отцу, прославить свое имя в науке.

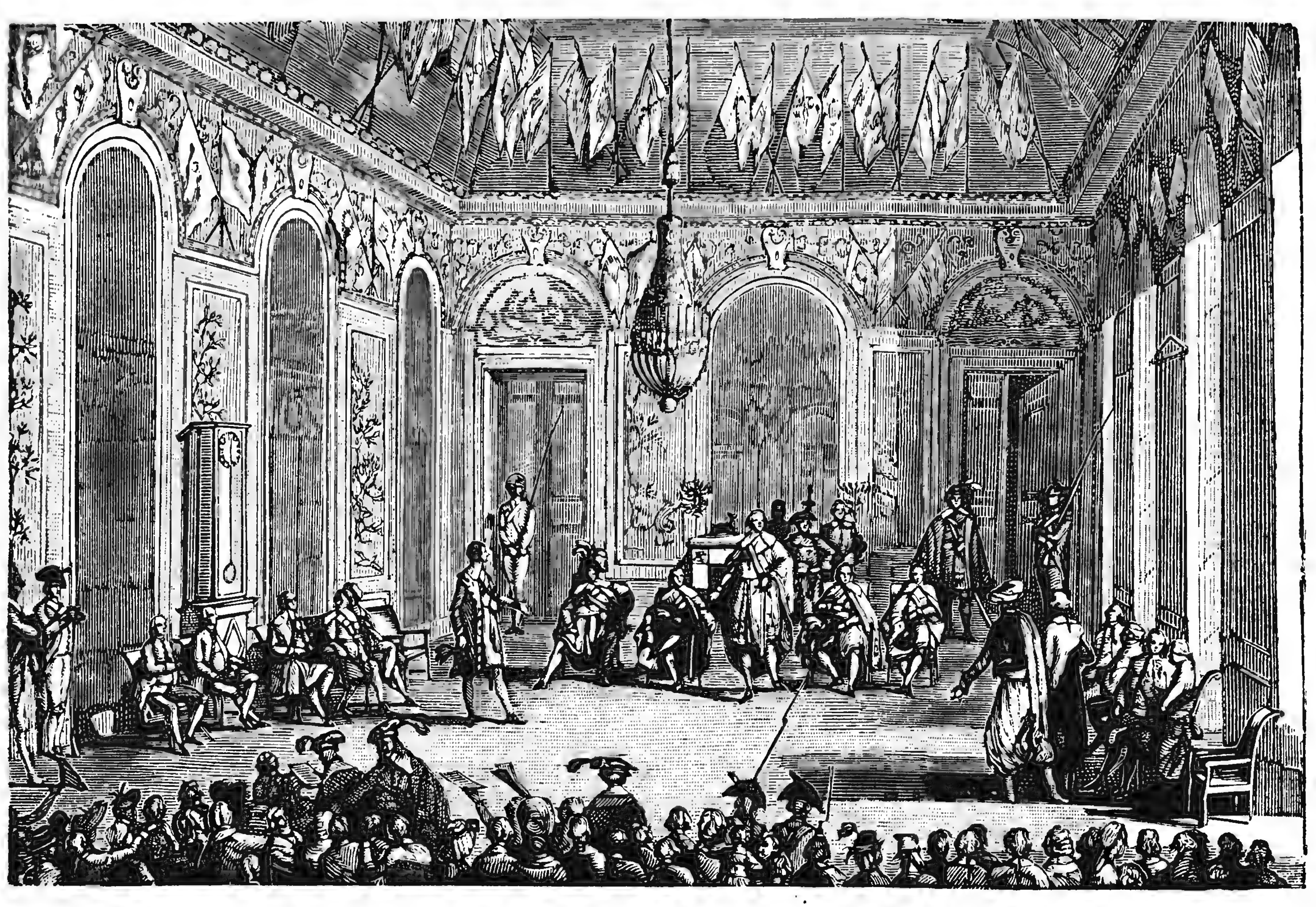
В годы своей работы в Директории Карно возвращается к своей научной работе. Он пишет свои «Réflexions» и посвящает много времени организации научных учреждений. При его ближайшем участии создается Институт, где он ведет работу в качестве члена первого класса, которым он был избран 1 августа 1796 г.

Бурные дни якобинской диктатуры теперь позади. На поверхность выползают беспринципные карьеристы и дельцы, прятавшиеся при Робеспьере по углам.

Конечно, Карно не в пример честнее и чистоплотнее многих эпигонов революций; бесспорно, он стоит намного выше своих коллег-директоров. Но вместе с тем несомненно, что это уже не тот непримиримый якобинец, которого мы знали во II году республики; недостаток большого политического кругозора, неумение смотреть далеко вперед не дают ему возможности стать в один ряд с такими гигантами революции, как Робеспьер. Всегда и всюду отстаивая свое мнение, никогда вслепую не подчиняясь коллективным решениям, стараясь не подпадать ни под чье влияние, Карно — революционер-одиночка — на самом деле увлекается событиями все дальше и дальше от своих прежних идеалов. От богатой якобинской программы, разделявшейся им прежде, той программы, которая теперь ежегодно, ежедневно, ежечасно ощипывается реакцией, в его политическом активе остается одно лишь голое понятие «республики». В индивидуализме Карно, в его неумении работать коллективно, в его упрямом оригинальничании и иллюзорной самостоятельности заключается глубокая личная трагедия этого человека,

---

1 Письмо к Ле-Козу, цитируемое Roussel'ем в «Un Evèque assermenté», стр. 259.



Заседание Исполнительной Директории

скатывающегося все дальше и дальше в объятия реакции.

Его ценили, его уважали, им дорожили, но он не был любим ни в Комитете общественного спасения, ни в Директории — этом послетермидорианском правительстве укреплявшейся у власти крупной буржуазии. Приставший к имени Карно и нестирающийся якобинский ярлык, его прошлая террористическая деятельность (его оправданиям не верят), его педантичная прямолинейность, несговорчивость и беспрестанные разговоры о «нерушимых законах свободы» делают его неприемлемым для остальной четверки. Бесталанный Баррас утаскивает из-под носа Карно власть над армией, и *организатор победы* остается директором без портфеля. Карно возмущается поведением коллег, негодует по поводу бездарных распоряжений Барраса по армии и приходит в столкновение с остальными директорами.

Согласно законам конституции, один из пяти директоров был обязан по жребию выйти из состава Директории. На место выбывшего Летурнера избирается Бартелеми, французский посол в Базеле, убежденный роялист. Бартелеми тоже становится в оппозицию к Баррасу, Ревбеллю и Ларевельеру, хотя и по другим мотивам, чем Карно. Отсюда, между прочим, берет свои корни клеветническое утверждение, повторяемое некоторыми историками, что Карно приближался в это время к роялизму. Эта клевета, пущенная в ход Баррасом и компанией для дискредитации *организатора победы*, не находит, однако, никакого подтверждения. Хотя против главенствовавшей тройки бывший якобинец и блокировался с роялистом, «нет никаких оснований смешивать Карно с роялистами» [1]. — «В силу своих взглядов,— пишет В. Блос,— Лазарь Карно никак не мог быть заодно с роялистами» [2].

Положение разряжается вооруженным переворотом 18 фрюктидора (4 сентября 1797 г.). Бартелеми и Карно свер-

---

[1] В. Блос, Французская революция, изд-во «Пролетарий», стр. 253.

[2] Там же, стр. 250.

гаются. Бартелеми арестовывается и ссылается в Гвиану, а Лазарю Карно, во время предупрежденному, удается бежать, чтобы не поплатиться головой. Он скрывается из Люксембурга в ту минуту, когда сбиры уже ломятся в его комнату. Экс-президент Директории приезжает под чужим именем в Женеву. Но его опознают здесь, и быть бы ему в руках Барраса, если бы чиновник местной полиции Дидье не решился предупредить организатора победы о грозящей беде, а банкир Бонтам и прачешник Якоб не помогли бежать *организатору побед.* Темной, ненастной ночью отправляется он в лодке через Женевское озеро в Германию. Говорят, этот побег был совершен при помощи Дюмурье, дошедшего в своем изгнании до роли лодочника. Но, утверждают биографы, Дюмурье так и не узнал Карно, и экс-директор благополучно высадился на немецкой земле.

Возвращаясь через Женеву из итальянского похода, генерал Бонапарт не погнушался арестовать банкира Бонтама за оказанную им помощь в побеге Карно, — того Карно, которому еще несколько месяцев назад тот же Бонапарт писал из Пьяченцы (20 флореаля IV года), из Милана (20 прериаля того же года) и из Вероны (9 плювиоза V года): «Я постараюсь заслужить ваше уважение; прошу сохранить вашу дружбу ко мне... Я всегда льщу себя вашей дружбой и навсегда останусь признательным вам... Дружбой немногих людей, подобных вам, я дорожу больше всего»...

Два года провел Карно в городе Аугсбурге под вымышленным именем Жаккье, занимаясь в это время исключительно научной и литературной работой. Здесь он написал, между прочим, памфлет «Réponse au rapport fait sur la conjuration du 18 fructidor au conseil des Cinq-Cents, par J.-Ch. Bailleul», в котором, не жалея красок, выставил напоказ шарлатанов Директории.

В ноябре 1799 г., когда он находился в Нюрнберге, к нему пришла весть о новом государственном перевороте. Вандемьерский путч ликвидировал Директорию; у власти стояло консульство во главе с Бонапартом. Революция шла на убыль.

В нивозе VIII года, как раз накануне нового, девятнадцатого века, в «Moniteur'е» под рубрикой «Париж» появилось официальное разрешение вернуться во Францию тридцати восьми осужденным во фрюктидоре депутатам. В частности, разрешалось вернуться Лазарю Карно — человеку, «могущему быть причисленным к гражданам, наиболее выдающимся своей образованностью и нравственностью» [1].

Снова встретился Карно с Бонапартом. Теперь переменились их роли. Один — молодой, уверенный в своем гении, жаждущий божественной славы, самодовольный, самовлюбленный, замышляющий о невозможном, сейчас управляет Францией и уже мечтает о целом мире. Другой — состарившийся, потрепанный судьбой и под ударами жизни превращающийся в человека «меньшего зла», — ныне подначален своему ученику, назначающему *организатора победы* генерал-инспектором армии.

26 марта Карно восстанавливается членом Института (по секции механических наук), из которого он был исключен приказом Барраса, а 2 апреля, после отставки Бертье, занимает предложенный ему первым консулом республики пост военного министра. И когда Бонапарт начинает готовиться к походу 1800 г., таланты, знания и опыт Карно оказывают ему превосходную поддержку. При этом Карно, как и прежде, ведет не одну лишь кабинетную работу, но сам отправляется на фронт и лично участвует в военных действиях. 10 мая он является в Рейнскую армию к генералу Моро и участвует в битве с австрийцами при Биберахе. Особенно много энергии вкладывает он в руководство альпийским походом. Но теперь ему уже не удается вознестись на ту высоту, которой он достиг во время якобинской диктатуры: ему нехватает самостоятельности и свободы, а вне этих условий он не умеет работать. Кроме того, он не хочет быть участником в переменах, готовящихся новым прави-

---

[1] Из письма г-жи Делессер от 9 января 1800 г., сообщенного Жоржем Бертэном.

тельством. Больше того, когда из-под Маренго приходит первоначальная весть о кошмарном поражении Бонапарта, он уже склонен к подготовке революционного переворота чуть ли не мечтая о возрождении Комитета общественного спасения. Мстительный и злопамятный Наполеон не простит ему этого; когда успехи при Маренго и Гогенлиндене возвратят армии Бонапарта несомненное преимущество, он даст ему понять, что человек, мечтающий о свержении первого консула, является лишним в правительстве.

Карно подает заявление в отставку. «Граждане консулы,— пишет он 16 вандемьера IX года,— я прошу вас об увольнении меня от министерства; благоволите принять мою просьбу».— «Это письмо,— сообщает Араго,— было следствием живых споров между республикой и империей, происходивших каждый день в мире первого консула и военного министра» [1].

Бонапарт недолюбливал Карно, служившего ему живым укором, он боялся его популярности и опасался подпускать его близко к власти. Первый консул мог терпеть возле себя лишь тех, кто безропотно соглашался растворяться в его властолюбивой личности.

Карно, в свою очередь, не был склонен набиваться в слуги будущего императора,— он был свидетелем его монархических устремлений и не хотел явиться соучастником цезаристского переворота.

Выйдя в октябре 1800 г. в отставку, Карно переехал с женой и сыном в Сент-Омер, в дом своего тестя. Здесь он делается отцом второго сына — Ипполита. Экс-министр, подвергающийся теперь полицейскому надзору и даже преследованиям со стороны бывшего аррасского аббата и лионского якобинца — всевидящего, всеслышащего и всезнающего Фуше, возвращается к своим научным и литературным занятиям. Ему удается в Сент-Омере написать свою математи-

---

[1] «Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров», т. I, стр. 464.

ческую работу «De la corrélation des figures de géometrie». Однако вскоре он снова заносится избирателями Па-де-Калэ в национальный лист и 9 марта 1802 г. избирается Сенатом в члены Трибуната, выхолощенного, беспринципного, прирученного Наполеоном «правительственного» учреждения.

Это было время, когда за Бонапартом уже выглядывал Наполеон (как удачно выразился Гюго). Лазарю Карно, благословившему когда-то этого генерала на большую жизнь, он рисуется теперь двуликим и загадочным. С одной стороны, Бонапарт, хотя и лелеющий мечту о короне, делается оплотом против реставрационных попыток внутри и извне страны, против «старого режима»; с другой стороны, этот маленький грузный человечек сдерживает снизу натиск санкюлотов, — тех, кто стремился под конец опрокинуть самый институт частной собственности. Бонапарт представляется ему обеспечивающим почти все завоевания революции и в то же время препятствующим ее дальнейшему углублению.

В эти годы, когда Франция уже отливала корону новому монарху, когда люди меняли свои убеждения, как перчатки, буквально состязаясь в темпах ренегатства, Карно пытался удержаться на своих старых политических позициях и, заняв место в Трибунате на левой стороне, стал в оппозицию к Бонапарту. Тем не менее это был уже далеко не тот непримиримый республиканец, каким мы его видели десяток лет назад. Так, он вотировал против учреждения ордена почетного легиона, заявив, что это учреждение задумано не для поощрения великих подвигов, но для удовлетворения тщеславной посредственности и для того, чтобы окружить первого консула покорными креатурами; но когда вместе со своими коллегами Карно получил этот орден, он принял его и носил. Он высказался против пожизненного консульства и только один протестовал против учреждения империи, но потом, спустя десять лет, он (пускай и с оговорками) все же принял от Наполеона титул графа и пэра и сделался министром императора. Но все-таки, пишет Араго, «история сохранит благородные слова Карно против узурпаторских устремле-

ний Бонапарта, — слова, произнесенные им в кругу бывших его гонителей за мнимый роялизм, в кругу людей, хвалившихся своим республиканизмом и жадно бросившихся на верные награды. Карно остался один среди развалин республики» [1].

Тот факт, что, когда вся Франция (по крайней мере, та Франция, которая могла громко говорить) раболепно предлагала себя в собственность блистательному генералу, только один единственный человек имел мужество поднять голос против нового цезаризма, делает этому человеку великую честь. 27 марта 1804 г. обработанный и вышколенный наполеоновскими молодчиками Сенат вручает первому консулу елейное послание, имеющее целью «убедить» Бонапарта, что его наследственное единодержавие совершенно необходимо для счастья Франции. Затем изливается бурный поток сладчайшей лести, верноподданнических самоуничижений и уверений в преданности, демонстрирующий перед первым консулом всю рабскую покорность этого великолепного учреждения. Становится ясным, что бесполезно всякое сопротивление, что всякая оппозиция должна раствориться в потоке лойяльности. Но подымается Карно, бывший якобинец, бывший член Комитета общественного спасения, — подымается человек, не привыкший заражаться стадным настроением, и произносит свою знаменитую речь, которую историки прозвали *последним вздохом великой революции*:

«Я, — сказал Карно, — далек от желания умалять хвалу, расточавшуюся здесь первому консулу. Но какие бы услуги ни оказал гражданин своему отечеству, есть границы национальной признательности, преступить которые не допускают ни честь, ни разум. И если этот гражданин вернул стране общественную свободу, если он содействовал благоденствию своего отечества, то разве возможно предложить ему в награду добровольное отречение от этой свободы? Разве

---

[1] «Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометро», т. I, стр. 465.

превращение отечества в его наследственную собственность не было бы равносильно уничтожению его собственного детища? С того момента, как французскому народу было предложено голосовать за пожизненное консульство, всякому легко было заметить, что за этим кроется еще и нечто другое. Мы видели, что постепенно был основан целый ряд явно монархических учреждений. Сегодня, наконец, обнаружилась истинная цель такого множества «временных» мероприятий. Мы созваны для того, чтобы высказаться по поводу формального предложения относительно восстановления монархии и облечения первого консула в сан наследственного императора. Неужели свобода была показана человеку лишь для того, чтобы он никогда не мог вкусить ее? Нет, я не могу согласиться с этим! Я не могу в этом благе, которое всеми предпочитается всему другому, видеть лишь одно заблуждение. Сердце мое говорит мне, что свобода возможна в нашем мире, что она должна притти и восторжествовать. Я верю, что царство свободы легче и прочнее, чем какое бы то ни было царство произвола... Я голосовал против пожизненного консульства; точно так же я голосую против восстановления монархии».

Эта речь произвела впечатление разорвавшейся бомбы. Но разбушевавшийся поток сервилизма снес все препоны. Каждый из великолепных трибунов в порыве выслуживания и демонстрирования своей дрессировки стремился первым опровергнуть «демагогическую» речь Карно. Три дня продолжались отвратительные дебаты. Затем, после окончания прений, Трибунат высказался подавляющим большинством за провозглашение первого консула Бонапарта императором французов. Сотканный из противоречий, императорский титул гласил: «*Наполеон I, божией милостью и установлениями республики император французов*». Первый консул, уже не удовлетворявшийся сознанием своей верховной пожизненной власти, получил теперь иллюзию ее продолжения в роду.

Карно сошел с политической арены. Наполеон не мог простить своему бывшему руководителю, учителю и настав-

нику свободомыслия и критики. Министр полиции, вездесущий Фуше, установил негласный надзор за несговорчивым республиканцем, и Лазарь Карно замкнулся в себе, ушел в личную жизнь, в науку, в изучение военного искусства и в воспитание своих мальчуганов. Он жил очень скромно, даже бедно, работая над вопросами математики и фортификации и усердно исполняя обязанности академика: это звание было получено им 5 жерминаля VIII года, по смерти Леруа. Но, в конце концов, подвергаясь бесконечным полицейским преследованиям, он сдался и уступил: он оставил Париж и перебрался в Пресль, маленькое заброшенное, заложенное и перезаложенное имение Дюпонов. Теперь Наполеон мог не опасаться отшельника...

6

Портрет Карно не будет полным, если в нем не найдет своего отражения научная деятельность этой многогранной, в высшей степени гармонично развитой, многосторонне талантливой личности. Мечтатель, политик, поэт, инженер и полководец, он был вместе с тем талантливым ученым. Если о его математических трудах строгий критик и может сказать, что они не принадлежат к числу тех плодов научного творчества, которые составляют эпоху, совершая коренные ломки прежних воззрений и методов, то все же три работы Карно, создавшие ему имя в науке, достойно украшают историю математической мысли великих годов. Как ни относиться к этим книгам, нельзя отрицать, что работы Карно оказали заметное влияние на математическое творчество последующих лет и создали толчок для дальнейших исследований.

Первой крупной математической работой Карно явилась та, что предлагается вниманию читателей этой книги: она вышла в свет в 1797 г., но написана, как об этом сообщает автор в предисловии к первому изданию, значительно раньше, — вероятно, вскоре после падения Комитета обществен-

ного спасения. В своих »Réflexions» автор берется показать, что метод бесконечно-малых математически совершенно строг и что поэтому нет никаких оснований отказываться от его употребления. Работа эта носит, таким образом, методологический характер. Ее историческое значение заключается в том, что Карно выступил с отпором развивавшимся в ту пору формалистским веяниям и своим отчетливым анализом различных способов обоснования диференциального и интегрального исчисления немало способствовал дальнейшей разработке этого вопроса.

Этими несколькими словами мы ограничим характеристику первой математической работы Карно, так как более детальный разбор ее читатель найдет в статье А. П. Юшкевича.

В двух других работах Карно — «Théorie de transversales» и «Géometrie de position»— были заложены первые камни здания новой геометрии.

Создание Декартом аналитической геометрии, за которым вскоре последовало изобретение исчисления бесконечно-малых, и открытие Галилеем и Гюйгенсом основных принципов динамики точки и твердого тела отвлекли математиков от прежних собственно геометрических методов. Интерес к элементарным методам заглох. Считалось зазорным прибегать к помощи интуиции, и идеалом в области изложения математической дисциплины считался полный отказ от использования конкретных образов. Знаменитый Лагранж гордился, что в своей «Аналитической механике» он ни разу не обратился к помощи чертежа.

Действительно, с конца XVIII в. аналитические методы достигают такого совершенства, что сведение самых запутанных конкретных вопросов к вычислению почти не представляет затруднений. Но отказ от элементарных методов является вредной крайностью, ибо самые вычисления оказываются нередко невыполнимыми. Во многих случаях непосредственное рассмотрение конкретного содержания изучаемого вопроса приводит к специальным методам решения, равносильным, правда, алгебраическим преобразованиям, но таким преоб-

разованиям, которые невозможно было бы отыскать среди скрытых числовых зависимостей; с другой стороны, если принять во внимание, что выраженное в немногих словах простое содержание какой-нибудь геометрической теоремы может содержать в себе множество различных уравнений, польза от комбинирования которых с другой аналогичной группой часто сразу же выявляется при простом сопоставлении двух таких теорем, то станет ясно, что в некоторых отношениях геометрия обладает своими преимуществами перед анализом.

На долю Карно выпало счастье предвосхищения назревшей в науке революции, одним из зачинателей которой он оказался. Историческое значение двух указанных его книг заключается в отказе от гегемонии анализа. Здесь — источник того расхождения между аналитической и синтетической новой геометрией, которое вскоре развернулось и выросло в спор принципиального характера.

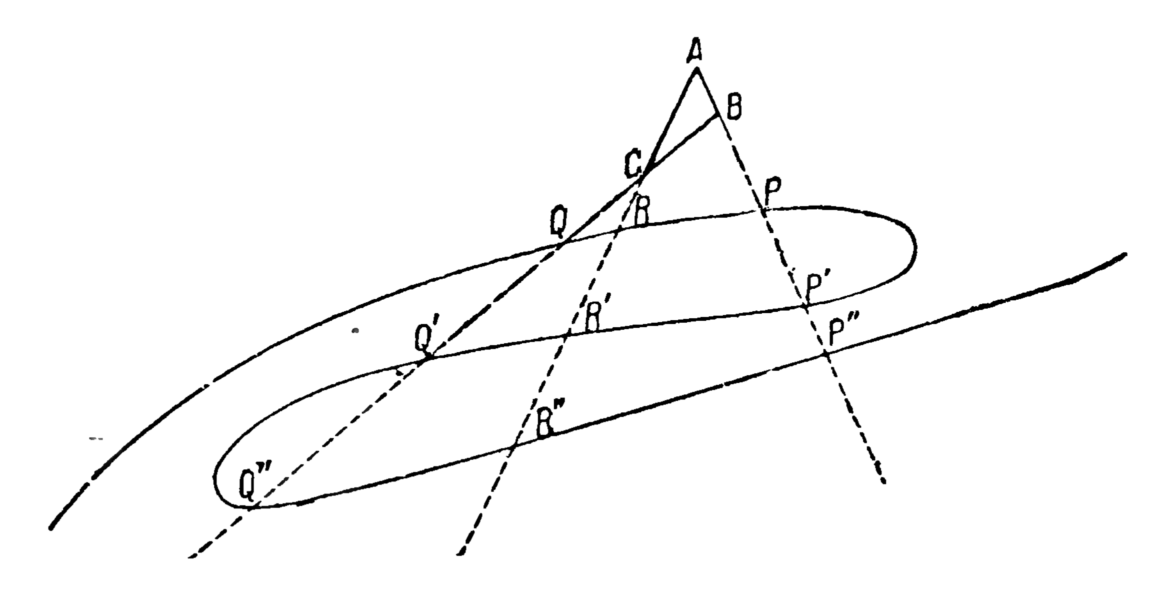
Книга Карно о теории трансверсалей, послужившая отправной точкой для многочисленных исследований выдающихся геометров, представляет собой как бы введение в современную геометрию. Эта теория может быть резюмирована следующей заключающей ее теоремой, обычно носящей в учебниках название *теоремы Карно*:

Если в плоскости произвольной алгебраической кривой степени m *построить произвольный треугольник ABC* (см. чертеж на стр. 327) *и продолжить его стороны так, чтобы получились все точки их пересечения с кривой, и если составить 6 произведений расстояний от каждой вершины до точек, получающихся от пересечения продленных сторон треугольника с кривой, то произведение трех произведений отрезков, последовательно отсчитанных на трех сторонах в одном направлении вокруг треугольника, будет равно произведению трех других, т. е.*

$$AP \cdot AP' \cdot AP'' \times BQ \cdot BQ' \cdot BQ'' \times CR \cdot CR' \cdot CR'' =$$
$$= AR \cdot AR' \cdot AR'' \times BP \cdot BP' \cdot BP'' \times CQ \cdot CQ' \cdot CQ''.$$

Чтобы оценить все значение этой теоремы, достаточно указать, что генерал Понселе извлек из нее способ геометрического построения касательной к кривой m-й степени в любой ее точке.

Но наибольшее право на славу дает Карно его «Геометрия положения», где впервые подверглись исследованию самые основания аналитической геометрии, где была исследована та необходимая согласованность в изменении формы фигур и в знаках членов их уравнений, благодаря которой



одни и те же уравнения можно подходящим образом относить к одной и той же фигуре, независимо от претерпеваемых ею деформаций.

Следует отметить, что Карно не обладал абсолютной уверенностью в истинности этого закона перманентности метрических отношений, которому Понселе дал впоследствии имя «принципа непрерывности»; более того, Карно даже усматривал в этом законе противоречие с некоторыми найденными им фактами. Но Карно его впервые сформулировал, и этот закон сохранился поныне. Его доказательство сейчас может быть приведено в гораздо более точной форме, чем это было доступно Карно.

Но, прежде чем перейти к доказательству указанного предложения, необходимо оговориться, что это доказательство проводится для уравнений, не выводимых из исходных путем более или менее сложных преобразований. Ибо оче-

видно, что если удается установить совпадение в изменениях значения величин и их знаков для начальной группы уравнений задачи, то это же будет справедливо и для всех уравнений, получаемых из начальных путем преобразований. Установив это, мы можем утверждать, что как бы ни изменялась фигура, ее элементы, выступавшие при составлении уравнения, всегда сохраняются и выражаются одними и теми же одночленами. Поэтому изменения, претерпеваемые уравнениями (если мы хотим сохранить абсолютные значения величин), могут относиться лишь к знакам. Из скольких частей ни слагались бы рассматриваемые величины, их можно всегда посредством простого приема свести только к двум: для этого лишь нужно под разными обозначениями ввести сумму и разность двух первых элементов, сумму или разность этой суммы или разности с третьим элементом и т. д.

Пусть теперь дана величина x, отсчитываемая на неподвижной или подвижной прямой $X'X$ от неподвижного или подвижного начала O. Допустим, что при составлении уравнений эта длина рассматривалась как составленная из двух частей a и b, где первая отсчитывается обязательно от O, а вторая от конца первой. Тогда x будет расстоянием от O до точки B. Положим, например, что в фигуре, для которой составляется уравнение, точки O, A и B расположены в указанном порядке, так что $x = a + b$, и пусть фигура теперь деформируется.

Пока точка A будет лежать между O и B, x попрежнему будет равен $a + b$, и наша формула не изменит своего вида. Если B окажется затем между O и A, то x тотчас превратится в $a - b$, но линия AB изменит направление по отношению к ее началу A, так что если бы мы с самого начала ставили в формуле перед b знак $+$ или $-$ в зависимости от значения выражаемой величины, то уравнение не пришлось бы менять, и оно попрежнему писалось бы $x = a + b$, где b отрицательно.

Допустим, наконец (так как между O, A и B возможны

три изменения порядка), что B находится по другую сторону O. Так как величина b теперь превосходит величину a, то, если мы хотим, чтобы x имел абсолютное значение, мы уже не будем в состоянии сохранить формулу $x = a - b$ или равносильную ей $x = a + (-b)$; если знак b уже установлен, то надо писать $x = b - a$.

Но можно избежать этого изменения формы, если придавать величине x разные знаки, когда он находится по разные стороны от O. Если A, занимавшее сперва место между O и B, перешагнуло через O без других изменений, то x перейдет от формы $a + b$ к форме $b - a$, но этого изменения можно избегнуть, заранее приписав величине a знак $+$ или $-$, в зависимости от того, считать ли его с одной или с другой стороны от O.

Это простое доказательство вполне оправдывает правило знаков расположения в геометрии.

Резюмируя свою работу, Карно приходит к выводу, что в геометрии нельзя разделять случаи, когда одна и та же фигура отличается лишь различным расположением своих частей, как это делалось постоянно со времен Эвклида. Напротив, эти случаи следует рассматривать совместно, введя принцип знака ($+$ или $-$). На этой основе Карно строит свою теорию коррелятивных фигур. Он надеется таким путем освободить геометрию от «иероглифического письма анализа» и помочь воссозданию геометрии в чисто синтетической форме.

Все эти работы чрезвычайно богаты идеями, и, конечно, Карно честно заработал себе имя в науке. Историческое значение этих работ безусловно велико; ряд крупнейших математиков масштаба Понселе брали эти работы как отправную точку для своих исследований. Но большинство разбросанных в этих трех книгах мыслей довольно элементарно и не всегда ново. Быть может, выражаясь словами Феликса Клейна, указанные работы «следует рассматривать как отображение безупречной и, несомненно, талантливой, но все же не гениальной личности Карно».

7

Исполнялись всевозможные сроки. Шел десятый год опального бытия Карно. Все эти годы он проводил над книгами в Пресле, а затем снова в Париже. Он выпустил в свет свои математические работы, представил Институту — своему детищу — ряд работ военного характера, в том числе «De la défense des places fortes» (классическое руководство по обороне крепостей, переведенное вскоре на все европейские языки), но, занимаясь академической работой, не прекращал следить за политическими событиями. Судьбы его родины не переставали волновать его. На глазах Карно уходил в небытие старый феодальный мир, мир кичливой и властной аристократии, задавленного и молчаливого крестьянства. Слагалась новая культура, причудливо переплетаясь в разнообразных сочетаниях с элементами старой. Хозяевами жизни делались новые люди. Уходили в тень аристократы, герои наследственной рыцарской шпаги; место шпаги на время заняла сабля наполеоновских солдат и офицеров, жезл маршалов и скипетр новоиспеченных герцогов и королей-вассалов. Когда-то безвестный артиллерийский офицер, полковник, генерал, первый консул, затем император, Наполеон уже не удовлетворялся теперь ни своей славой, ни властью. О еще большей славе, о еще большей власти мечтает этот тщеславный человек. Он ведет свои героические полчища на холодный северо-восток, к снежным равнинам Москвы, он превращает свой поход в триумфальное, победное шествие, и потом, когда столица неприступной страны падает к его ногам, он, точно испугавшись какого-то призрака, поворачивает назад и начинает отступление более чудовищное, еще более невозможное, чем его самые громкие победы. Гибнут все завоевания Наполеона, и уже самой Франции, самой империи угрожает смертельная опасность. Уже брат гильотинированного короля поглядывает в сторону Франции.

В эти годы Лазарь Карно был так беден, что даже не имел возможности выписывать газеты. Всякий день, в один

и тот же час, он приходил в библиотеку Института, садился у камина и с явным огорчением читал известия об успехах неприятеля. 24 января 1814 г. он пришел в необыкновенное волнение, попросил бумаги и написал следующее письмо:

«*Государь!*

Пока успехи венчали ваши предприятия, я не позволял себе предлагать вашему величеству мои услуги, которые могли быть вам неприятны; я не предлагал их и потому, что не склонен служить монархам, — даже таким, которые заслуживают почитания и уважения. Но теперь, когда жестокая фортуна испытывает твердость моей страны, я решился предаться вашей воле. Конечно, невелики возможности шестидесятилетнего старика; но я думаю, что пример солдата, патриотические чувства которого всем известны, может собрать вокруг ваших орлов немало новых ратников.

Еще есть время, государь, завоевать почетный мир. Еще вы можете возвратить себе любовь великого народа и подарить Франции счастье и свободу».

Нельзя сказать, чтобы Наполеон пришел от этого письма в большой восторг. Но ему не приходилось быть разборчивым. Он, конечно, понимал, какую мобилизующую роль может сыграть привлечение Карно к обороне страны, он давал себе отчет в том, какого блестящего организатора он приобретает для своей армии. Больше того, Наполеону льстило предложение непоколебимейшего из республиканцев. Однако император не перестает быть политиканом даже в самые серьезные для его страны и его господства, минуты. Он мог предложить старику самый ответственный самый высокий военный пост, и, вероятно, ему не пришлось бы впоследствии раскаиваться. Но, должно быть, такова уж человеческая природа: теперь, когда власть ускользала из рук императора, когда империя уходила от него, подобно уже рассказанной сказке, теперь, когда он досиживал на своем расшитом пчелами троне последние, считанные дни и уже, казалось, никакое безрассудство не могло быть рискованным и никакой риск не мог быть безрассудным, — Наполеон обеспокоился возможными последствиями назначения Карно и побоялся предоставить ему какое-

нибудь заметное место. С поразительной близорукостью император испугался этого педантичного патриота как возможного соперника. Решаясь на привлечение республиканца, но вместе с тем озабоченный тем, чтобы популярность Карно не укрепилась новыми успехами, Наполеон разрешил свою дилемму с изумительной простотой (той самой простотой, которой хватает на каждого мудреца): он решил дать возможность старику получить сокрушительное поражение на одном из второстепенных участков фронта.

В то время, когда австрийцы, пруссаки и англичане уже надвигались на Париж, в то время, когда было целесообразнее всего использовать таланты организатора военных побед революции для организации военных побед империи, Наполеон дает старику до обиды странное поручение: Карно назначается генералом дивизии и губернатором Антверпена.

Антверпен! Конечно, важность этого стратегического пункта была неоспорима; но в дни, когда неприятель захватывал более важные пункты, устремляясь прямо на Париж, не Антверпен решал положение. К тому же город находился накануне сдачи неприятелю. Наполеон не верил в возможность удержания Антверпена и падением осажденной крепости, поручаемой заботам Карно, надеялся нанести удар непререкаемому авторитету своего учителя.

В конце января, даже не удостоившись свидеться с императором, Карно получает от него письмо с двусмысленным назначением. Проглотив обиду, он исполняет приказание, как солдат. Захватив с собой небольшой вещевой мешок, старик немедленно отправляется в путь. Антверпен уже окружен, и ему приходится пробираться через неприятельские бивуаки. 2 февраля Карно достигает крепости.

И тогда совершается невозможное... На другой день после приезда Карно в Антверпен англичане приступают к бешеной осаде города; уверенные в быстрой капитуляции французов, они начинают, однако, недоумевать перед стойкостью осаждаемых. До 6-го числа продолжается беспрерывная бомбардировка. На французские корабли выпу-



Памятник Лазарю Карно в Антверпене

скается полторы тысячи бомб, около тысячи обыкновенных ядер, множество каленых ядер и ракет. Но все напрасно стойко держится Карно. Потом неприятель удаляется: трехдневный опыт научил адмирала Грээма, с кем он имеет дело.

Однако оборона Антверпена, составившая, по словам проф. В. Дерюжинского, «один из самых блестящих военных подвигов Карно» и воскресившая, вопреки наполеоновским расчетам, его былую военную славу, явилась уже ненужной для империи вспышкой героизма: Бонапарт смещен, королем избран Людовик XVIII, и его высочество граф д'Артуа 5 мая предписывает губернатору Антверпена сдать без боя город англичанам, а самому уйти от дел.

Наполеоновская пчела сменяется королевскими лилиями. Бурбоны уже готовятся зачеркнуть четверть века великой борьбы французского народа. Но в первых числах марта 1815 г. парижские газеты сообщают странную новость: Бонапарт покинул Эльбу и высадился с шестью сотнями человек во Фрежюсе. Обычным залихватским тоном газеты наперебой успокаивают читателей: «*Сумасшедшему* будет возвращено сознание»; «маршалу Нэю уже поручено посадить *безумца* в железную клетку»...

Проходит неделя. «Moniteur» уже с опаской сообщает, что Нэй изменил христианнейшему королю, перейдя на сторону *генерала* Бонапарта. Но посланы новые войска, которые должны наказать и того и другого.

Однако никто не оказывает сопротивления Бонапарту! Войска повторяют пример маршала Нэя, и каждый посланный против бывшего *первого консула* отряд увеличивает его армию. Газеты уже сообщают, что *бывший император Франции Наполеон I* находится в Гренобле, в Лионе, он уже подходит к Парижу... И, наконец, «*установлениями республики император французов*» вносится на руках безумствующей толпы в Тюильрийский дворец, спешно освобожденный Людовиком.

Однако этот победный марш императора был последней вспышкой фейерверка его славы и силы. Страна не верит

в прочность императорского престола, державы собираются в новый поход против Франции, растеряны лучшие слуги. Те, кто казались самыми преданными, даже родные братья императора, отсутствуют: одни продали шпагу огуречному королю, другие выжидают более выясненной ситуации, отсиживаясь в своих имениях. А тем, кто приходит на службу к императору, — таким, как герцог Отрантский (Жозеф Фуше), — сам Наполеон не верит: и в самом деле, история покажет, что, делаясь снова министром полиции императора, Фуше уже продан с головой и потрохами эвакуировавшемуся королю.

И тогда вспоминает Наполеон о Лазаре Карно, антверпенском герое. Правда, он обошелся с прославленным патриотом не очень хорошо, но всем известно, что этот старик не помнит зла, особенно тогда, когда понятие долга закрывает перед ним все другие интересы. В тяжелый час, когда страна стоит у порога реставрации, император просит республиканца притти к нему на помощь. — Либо он (Бонапарт), либо Людовик, — что лучше? — бьет он на больную струнку этого человека «меньшего зла». И Карно поддается уговорам.

Но и в эти решающие дни император побаивается поручить *организатору победы* военное министерство: он боится Карно, как боялся талантливого Келлермана, и отдает военный портфель маршалу Даву, а Карно назначается министром внутренних дел. Облаченный в расшитый пальмовыми ветвями мундир, этот министр делается самой верной опорой Наполеона в период *ста дней*. Император сознает свою вину перед стариком и стремится загладить ее. Желание Наполеона не ускользает от Фуше. Этот хитроумный человек, действующий по инструкциям Людовика, стремится обескровить министерство императора, выжив из него верного императору министра. И под маской доброжелательности Фуше советует императору, чтобы вознаградить Карно, дать антверпенскому герою графское достоинство. Наполеон не догадывается о помыслах Фуше и следует этому совету.

Старик воспринимает этот подарок как внезапно отпущенную пощечину. Один офицер, свидетель момента, передает это событие так:

«Мы сидели за обедом у министра внутренних дел. Приносят письмо. Министр разломал печать и, пробежав глазами послание, обратился к нам со словами: «Перед вами, господа, граф империи! Я знаю, откуда этот удар: желают, добиваются моей отставки. Но я не доставлю им этого удовольствия; я останусь здесь до тех пор, пока не уверюсь в ненужности моей службы. Пока же я остаюсь на своем посту, я удовлетворюсь только тем, что не буду приставлять этого титула к моему имени и не приму диплома, сколько бы ни настаивали. Но вы можете теперь, господа, быть уверены, что как только неприятель будет отражен, вы будете иметь другого министра» [1].

Высоко ценя своего министра, Наполеон все-таки и теперь не доверял ему в вопросах обороны и боялся слушаться его военных советов. Как Карно ни отговаривал императора от нового похода, его усилия остались безрезультатными. И, говорят, лишь после смертельного поражения при Ватерлоо, уже безвозвратно упустивший свою корону, Наполеон воскликнул: «Я плохо знал тебя, Карно!»

22 июня Наполеон отрекается от престола. И со смертью великого Пана кончается героическая эпоха.

Приняв отречение императора, Палата выбирает временное правительство, и 324 голоса—подавляющее большинство — получает старик Карно. Собственно говоря, председательское место в этом правительстве должно было принадлежать ему, но пройдоха Фуше, тоже очутившийся в этой новой Директории, незаметно вполз на председательское кресло. И пока Карно и его коллеги заботятся о защите Парижа от иностранного вторжения, Фуше расчищает поле для реставрации, вы-

---

[1] Цитирую по Араго («Биографии знаменитых астрономов, математиков и физиков», т. I, стр. 479).

торговывая себе место в королевском правительстве. В первых числах июля, когда войска союзников вступают в Париж, купленный Людовиком Фуше предлагает временному правительству «в знак протеста» самораспуститься. По существу это означало очистить место для Бурбонов. На другой день к Тюильрийскому дворцу подъезжает пышная королевская карета. Над домами снова развеваются королевские флаги. А в министерстве полиции опять сидит Фуше.

Только теперь обнаруживает Карно игру этого расстриги. Всегда спокойный и сдержанный, на этот раз старик взволновался.— «Куда же мне теперь итти, предатель?»— в бешенстве спрашивает Карно новоиспеченного роялиста.—«Куда тебе угодно, осел»,— хладнокровно отвечает расстрига... — «Этим лаконическим диалогом, характеризующим двух бывших якобинцев,— говорит один писатель,—завершается удивительная драма нового времени—великая революция с ее ослепительной наполеоновской фантасмагорией».

Впрочем, на вопрос Карно Фуше ответил не только подлой четырехчленной фразой, но и более конкретным указанием: 14 июля опубликовывается приказ министра полиции, которым Лазарь Карно — только он один из всего состава министерства *ста дней*,— Карно, прославивший своим именем Францию, организатор ее побед, один из самых честных деятелей эпохи, инженер, поэт и ученый, приговаривается к пожизненному изгнанию, как убийца его христианнейшего величества Людовика XVI.

Даже император Александр, находившийся в это время в Париже для укрепления престола Бурбонов и распространявшийся в придворном дамском обществе о своих ужасно р-р-республиканских убеждениях, был неприятно поражен изгнанием такого человека. Он сам присылает ему 24 июля заграничный паспорт с визой на въезд в Россию. Но только в Германии удалось Лазарю Карно воспользоваться этим паспортом, потому что он был принужден, опасаясь преследований Фуше, оставить Францию под чужим именем и под чужим именем переехал ту реку, естествен-

ную границу его отечества, на которой двадцать лет назад он прославил французские знамена.

С паспортом русского императора он приехал в Варшаву, где был очень тепло встречен польской интеллигенцией. Но желание быть поближе к Франции заставило его принять предложение прусского правительства: он поселился в Магдебурге, где провел последние дни своей жизни, занимаясь математикой, литературным творчеством и трудами по военно-инженерному делу. Участник драматических эпизодов революции, он и тут не мог отойти от волновавших его политических вопросов. Карно написал памфлет против Людовика XVIII, где, стоя у гробовой доски, оправдывал историческое решение Конвента о казни короля, политику Террора и все те крайности революции, которые до сих пор вызывают благочестивый ужас у недостойных наследников якобинских завоеваний.

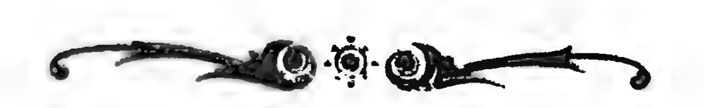
До конца своих дней он не теряет работоспособности и бодрости духа. В 1820 г. он выпускает свои «Поэтические произведения» и «Герои-комическую поэму о Дон-Кихоте» в 1822 г.—«Телемака», в 1823 г.— мемуар «О крепостях» [1]

2 августа 1823 г. прервалась кипучая жизнь семидесяти-

[1] Это была его последняя работа военного характера. Мы очень мало останавливались в тексте на работах Карно, посвященных вопросам крепостной обороны. Для характеристики этой стороны деятельности Карно укажем, что Фридрих Энгельс ставил Лазаря Карно в ряд с такими военными талантами, как Александр Великий или Юлий Цезарь, приписывая этим трем стратегам «успехи, открывавшие каждый раз новую эпоху» (из письма Энгельса к Марксу от 22 апреля 1857 г.). Сочинения Карно о крепостной обороне до такой степени жизненны и проникнуты таким глубоким пониманием крепостного дела, что не утратили интереса и поучительности до сего времени. Очень хорошо охарактеризованы эти работы Цезарем Кюи: «Идеи Карно об обороне (вылазки и навесный огонь) вместе с идеями Монталамбера (подавляющее преобладание артиллерийского огня и казематы) составляют суть современной упорной обороны крепостей».

летнего старика. На магдебургских улицах вытянулась похоронная процессия. У могилы говорились речи. Потом на холм сырой земли положили простую гранитную плиту с лаконичной надписью: «*Карно*».

По словам современников, этот камень и эта надпись прекрасно гармонировали с твердостью и простотой человека, упокоившегося под надгробной плитой.



ЛИТЕРАТУРНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

Сочинения Лазаря Карно

1. Essai sur les Machines en général, par un officier du Génie.—Dijon, 1783. (Опыт о машинах вообще, Дижон, 1783).

Это издание вышло анонимно. Другое издание (с именем автора на титульном листе) вышло в 1786 году.

2. Eloge de M. le maréchal de Vauban, par M. Carnot, capitaine au corps royal du Génie. — Dijon et Paris, 1784. (Похвальное слово маршалу Вобану, г. Карно, капитана королевского инженерного корпуса. — Дижон и Париж, 1784).

Другое издание этой работы, выпущенное в 1786 году маркизом Монталамбером, носит такое заглавие: Eloge de Sébastien le Prestre, chevalier, seigneur de Vauban, etc., ouvrage enrichi d'observations par un amateur.

3. Observations sur la lettre de M. Choderlos de Laclos, à MM. de l'Académie française, concernant «L'éloge de Vauban», par M. Carnot.—Arras et Paris, 1786. (Замечания, доложенные г. Карно членам франц. академии о письме г. Шодерло де Лакло, касающемся «Похвалы Вобану». Аррас и Париж, 1786).

4. Mémoire présenté au Conseil de la Guerre, au sujet des places fortes qui doivent être démolies ou abandonnées avec examen de cette question: Est-il avantageux au Roi de France, qu'il y ait des places fortes sur les frontières de ses Etats.—Paris, 1789. (Мемуар, представленный в Военный совет по поводу крепостей, которые должны быть либо разрушены, либо оставлены, с разбором следующего вопроса: выгодно ли королю Франции, чтобы на границах его владений находились крепости. — Париж, 1789).

5. Réclamation adressée à l'Assemblée nationale contre le régime oppresif sous lequel est gouverné le corps royal du Génie, en ce qu'il s'oppose à progrès de l'art et au bien qu'il serait possible de faire; par M. Carnot, capitaine dans ce corps.— Paris, 1789. (Заявление, адресованное в Национальное

---

[1] Сост. М. Подгорным.

собрание против притеснительного режима, царящего в королевском инженерном корпусе и противоречащего прогрессу в искусстве и благополучию, которые возможны были бы в других условиях, г. Карно, капитана корпуса. 1789).

6. Carnot l'aîné, député du Pas-de-Calais, à ses collègues (au sujet des Bastilles), 5 janvier an IV de la Liberté française — Paris, 1792. (Карно старший, депутат Па-де-Кале, — своим коллегам (по поводу Бастилий), 5 января IV года французской свободы. — Париж, 1792).

7. Rapport sur les réparations et indemnités dues à la mémoire et aux familles de Dillon et Berthois.—9 juin 1792. (Доклад об удовлетворениях и вознаграждениях семей Диллона и Бертуа. — 9 июня 1792).

8. Décret de l'Assemblée nationale sur une fabrication de piques, précédé du rapport de Carnot.—1-er août 1792. (Декрет национального собрания об изготовлении пик, с приложением доклада Карно.— 1 августа 1792).

9. Rapport fait à la Convention nationale par ses commissaires: Carnot, Garrau et Lamarque, envoyés par elle aux frontières des Pyrénées, présenté à la Convention le 12 janvier 1793. (Доклад, сделанный Национальному Конвенту его комиссарами Карно, Гарро и Ламарком, командированными им на границы Пиренеев; представлен Конвенту 12 января 1793).

10. Rapport sur la levée d'une légion pour l'armée des Pyrénées, présenté au nom du Comité de défense générale.— 29 janvier 1793. (Доклад о формировании легиона для Пиренейской армии, представленный на имя Комитета общественной обороны. — 29 января 1793).

11. Rapport sur la réunion, au territoire de la République, de plusieurs enclaves et pays circonvoisins, présenté au nom du Comité diplomatique.—14 février 1793. (Доклад о присоединении к территории республики нескольких вдающихся в нее и окружающих ее пограничных стран, представленный на имя дипломатического комитета.— 14 февраля 1793).

12. Déclaration des droits du citoyen, proposée par Carnot—10 mars 1793. (Декларация прав гражданина, предложенная Карно.— 10 марта 1793).

13. Rapport sur la manufacture extraordinaire d'armes établie à Paris, fait au nom du Comité de salut public.— 3 novembre 1793. (Доклад об ударном производстве оружия, ведущемся в Париже, представленный на имя Комитета общественного спасения.— 3 ноября 1793).

14. Projet de décret sur la réquisition des armes de guerre.— 16 décembre 1793. (Проект декрета о реквизиции военного оружия.— 16 декабря 1793).

15. Rapport sur la suppression du Conseil exécutif et son remplacement par des Commissions particulières, présenté au nom du Comité de salut public.— 1-er avril 1794. (Доклад о ликвидации Исполнительного комитета и замене его особыми комиссиями, представленный на имя Комитета общественного спасения.— 1 апреля 1794).

16. Réponse du président de la Convention (Carnot), à l'Adresse des Jacobins de Paris.— 16 mai 1794. (Ответ президента Конвента [Карно] парижским якобинцам.—16 мая 1794).

17. Rapport sur la reprise des quatre places de la frontière du nord.— 22 septembre 1794. (Доклад об отбитии у противника четырех пунктов на северной границе.— 22 сент. 1794).

18. Compte-rendu, en exécution du décrét du 21 nivose an III, par Carnot, représentant du peuple, de ses dépenses dans les diverses missions qu'il a remplies.— Paris, 21 pluviôse, an III (9 février 1795). (Представленный во исполнение декрета от 21 нивоза III года отчет народного представителя Карно в расходах, произведенных им при выполнении различных возложенных на него поручений.— Париж, 21 плювиоза III года [3 февраля 1795]).

19. Campagne des Français depuis le 22 fructidor de l'an 1-er (8 septembre 1793) jusqu' au 15 pluviôse an III, précédé du rapport de Carnot.—4 mars 1795. (Французская кампания с 22 фрюктидора I года [8 сентября 1793] по 15 плювиоза III года, с приложением доклада Карно.— 4 марта 1795).

Немецкий перевод этой книги издан в 1796 г.

20. Opinion de Carnot, représentant du peuple, sur l'accusation portée contre Billaud-Varennes, Collot d'Herbois, Barére et Vadier, par la Commission des Vingt-Un.— Germinal an III (1795). (Мнение народного представителя Карно по поводу обвинения, предъявленного «комиссией 21-го» Билльо-Варенну, Колло д'Эрбуа, Барреру и Вадье.— Жерминаль III года [1795]).

21. Discours prononcé par le président du Directoire (Carnot) à la fête de la Reconnaissance et des Victoires, le 10 prairial an IV. (Mars 1796). (Речь президента Директории [Карно], произнесенная им на празднике Признательности и Побед 10 прериаля IV года [март 1796]).

22. Discours prononcé à la fête de la Liberté, le 9 thermidor an IV. (Речь на празднике Свободы 9 термидора IV года).

23. Discours prononcé à la fête commémorative du 14 juillet, le 26 messidor an V. (Речь в память 14 июля, произнесенная 26 мессидора V года).

24. Discours prononcé à la fête commémorative du 10 août.— 23 thermidor an V. (Речь в память 10 августа.— 23 термидора V года).

25. Oeuvres mathématiques de Carnot.—Basle, 1797. (Математические труды Карно. Базель, 1797).

Сюда вошли Essai sur les machines (1) и Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal (Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых). Последняя работа вышла отдельно в значительно дополненном виде в 1813 году. Еще до этого — в 1800 году — Réflexions были выпущены во Франкфурте на немецком языке (в переводе Фр. Гауффа), а в 1801 г.— в Лондоне на английском языке (в переводе Вильяма Диксона). С тех пор книга выдержала ряд изданий. Русский перевод этой работы появляется впервые.

26. Premier tableau des campagnes des Français depuis le 8 sept. 1793 jusqu'au 15 pluviôse, an III.—Paris, an V. (Первое описание французских походов с 8 сентября 1793 года по 15 плювиоза III года. — Париж, год V).

27. Second tableau des campagnes des Français du 15 pluviôse an III, au 1-er ventôse an V.— Paris, an V. (Второе описание французских походов с 15 плювиоза III года по 1 вантоза V г. — Париж, год V).

28. Réponse de L.-N.-M. Carnot, citoyen français, l'un des fondateurs de la République et membre constitutionnel du Directoire exécutif, au rapport fait sur la conjuration du 18 fructidor au Conseil de cinq-cents, par J.-Ch. Bailleul, au nom d'une Commission spéciale.— 8 floréal an VI de la République (1798). (Ответ французского гражданина Л.-Н.-М. Карно, одного из создателей республики и члена Исполнительной Директории, на доклад, сделанный Ж.-Ш. Байолем Совету Пятисот по поводу заговора 18 фрюктидора, адресованный на имя специальной комиссии.— 8 флореаля VI года Республики [1798]).

Немецкий перевод этой работы вышел в Нюрнберге в 1799 г., английский перевод — в Лондоне в 1799 г.

29. Lettre du citoyen Carnot, au citoyen Bossut, contenant des vues nouvelles sur la Trigonométrie.—30 fructidor an VIII (Paris, 1800). (Письмо гражданина Карно гражданину Боссю, содержащее новые воззрения на тригонометрию.— 30 фрюктидора VIII года [Париж, 1800]).

30. De la Corrélation des figures de géométrie, par Carnot, membre de l'Institut national.— Paris, 1801. (О соотношении

геометрических фигур, члена Национального института Карно. — Париж, 1801).

Немецкий перевод этой работы, выполненный К.-Ф. Шелли гом, вышел в Дрездене в 1801 г.

31. Géométrie de position à l'usage de ceux qui se destinent à mesurer les terrains. — Paris, 1803. (Геометрия положения для тех, кто готовится к измерению земель. — Париж, 1803).

На немецком языке эта работа появлялась в двух переводах: в 1804 г. в Мангейме в переводе Гайлигенштейна и в 1810 г. в Альтоне в переводе Шумахера.

32. Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. — Paris, 1803. (Основные принципы равновесия и движения. — Париж, 1803).

Немецкий перевод этой работы, выполненный Вейссом, вышел в Лейпциге в 1805 г.

33. Discours prononcé par le citoyen Carnot sur la motion relative au gouvernement héréditaire [11 floréale an XII] (1804). (Речь, произнесенная гражданином Карно по поводу внесенного предложения об установлении наследственной власти [11 флореаля XII года] [1804]).

Книга выдержала несколько изданий.

34. Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales. — Paris, 1806. (Мемуар о соотношении между взаимными расстояниями любых пяти взятых в пространстве точек, с добавлением этюда о теории трансверсалей. — Париж, 1806).

35. De la défense des places fortes, ouvrage composé par ordre de Sa Majesté impériale et royale pour l'instruction des éléves du corps du Génie. — Paris, 1810. (Об обороне крепостей. Труд, составленный по приказу Его императорского и королевского Величества для воспитанников инженерного корпуса. — Париж, 1810).

2-е издание этой работы вышло в 1811 г., 3-е — 1812 г.

36. De la stabilité des corps flottants. Rapport fait à la première classe de l'Institut, sur un mémoire de M. Ch. Dupin. Paris, 1814. (Об устойчивости плавающих тел. Доклад, сделанный первому классу Института по поводу мемуара М. Ш. Дюпена. — Париж, 1814).

37. Mémoire adressé à S. M. Louis XVIII, roi de France, par M. Carnot, lieutenant-général, chevalier de l'Ordre royal et militaire de St. Louis, membre de la Légion d'Honneur, de l'Institut de France, etc. — Bruxelles. (Мемуар

К а р н о, адресованный Его Величеству Людовику XVIII. Брюссель).

38. Exposé de la situation de l'Empire, présenté à la Chambre des Pairs, par le ministre de l'Intérieur. — Paris, 1815. (Отчет министра внутренних дел о положении империи. — Париж, 1815).

39. Recueil de poésies diverses, par général C a r n o t. — Paris, 1820. (Сборник различных стихотворений генерала К а р н о. — Париж, 1820).

40. Don Quichotte, poême héroï-comique en six chants par L.-N.-M. C a r n o t. Paris et Leipzig, 1821. (Дон-Кихот, поэма герои-комическая в шести песнях, написанная Л.-Н.-М. К а р н о. — Париж и Лейпциг, 1821).

41. Télémaque dans l'île de Calypso, poême par M-me la comtesse d e B e l z. — Berlin, 1822. (Телемак на острове Калипсо, поэма графини Б е л ь ц. — Берлин, 1822).

42. Mémoire sur la fortification primitive, pour servir de suite au Traité de la défense des places fortes. — Paris, 1823. (Мемуар о простейшем укреплении, служащий продолжением «Трактата об обороне крепостей». — Париж, 1823).

Сочинения, приписываемые Лазарю Карно

43. Second mémoire de C a r n o t. — Hambourg, 1799. (Второй мемуар К а р н о. — Гамбург, 1799).

44. Recueil de lettres de deux amants. — Paris, an IX (9 томов). (Сборник писем двух любовников. — Париж).

Переписка Лазаря Карно

45. Correspondance de N a p o l é o n B o n a p a r t e avec le comte C a r n o t, ministre de l'intérieur, pendant les cent-jours. — Paris, 1819. (Письма Н а п о л е о н а Б о н а п а р т а графу Карно, министру внутренних дел в период «ста дней». — Париж, 1819).

46. Correspondance inédite de C a r n o t avec Napoléon pendant les cent-jours. — Paris, 1819. (Неизданная переписка К а р н о с Наполеоном в период «ста дней». — Париж, 1819).

47. Correspondance de général de C a r n o t (3 тома). (Переписка К а р н о).

Документы, относящиеся к деятельности Лазаря Карно

48. Procès-verbaux de l'Assemblée législative. (Протоколы Законодательного собрания).

49. Procès-verbaux de la Convention. (Протоколы Конвента).

50. Procès-verbaux du Directoire exécutif. (Протоколы Исполнительной Директории).

51. Procès-verbaux du Tribunat. (Протоколы Трибуната).

Памфлеты современников на Лазаря Карно

52. De la tyrannie de Carnot. Paris. (О тирании Карно. Париж).

53. Détail sur la mort tragique de Carnot, qui s'est brûlé la cervelle — Paris. (Подробности трагической смерти Карно, всадившего себе пулю в лоб. — Париж).

Общие работы о жизни и деятельности лазаря канро

54. Arago, D.-F.—Biographie de Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot.—Paris, 1850. (Араго Д.-Ф.— Биография Лазаря-Николая-Маргерита Карно. — Париж, 1850).

Переведена на различные языки, в том числе на русский.

55. Baron de B*** [Charles Doris].— Vie privée, politique et morale de Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, ex-lieutenant-général, ex-ministre, etc. etc.— Paris, 1816. (Барон де Б*** [Шарль Дори].— Частная, политическая и духовная жизнь Лазаря-Николая-Маргерита Карно, Париж, 1816).

56. Bonnal, M.— Carnot d'après les archives nationales, le dépôt de la guerre et les séances de la Convention.— Paris, 1888. (Бонналь, М.— Карно по документам национального архива, военным материалам и протоколам заседаний Конвента. — Париж, 1888).

57. Burdeau, A.— Une Famille des patriotes.— Paris, 1888. (Бюрдо А.— Семья патриотов. — Париж, 1888).

58. [Carnot, H.].— Mémoires sur L. Carnot, par son fils. 1753 — 1823.— Paris, 1861—1863 (2 тома). (Карно, Ипп.— Воспоминания о Л. Карно его сына. 1753—1823.— Париж, 1861— 63).

Имеется новое издание (1907 г.).

59. Charavay, Etienne.— Carnot (Lazare-Nicolas-Marguerite). (Статья в «La grande Encyclopédie», inventaire raisonné des sciences, des lettres et des arts, par une société de savants et de gens à lettres, sous la direction de Berthelot etc., tome neuvième, pp. 474—479). (Шаравей, Этьенн.— Карно, Лазарь-Николай-Маргерит. Статья в «Большой энциклопедии»).

60. Depasse, H.— Carnot.— Paris, 1883. (Дэпасс.— Карно.— Париж, 1883).

61. Дерюжинский, В.—Карно (Лазарь-Николай-Маргерит). (Статья в Энциклопедическом словаре Ф. Брокгауза и И. Ефрона, т. 14, стр. 564—565).

62. Dreyfous, Maurice.—Les Trois Carnot.—Paris, 1888. (Дрейфус, Морис.—Трое Карно.—Париж, 1888).

63. Fink, K.—Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, sein Leben und seine Werke.—Tübingen, 1894. (Финк, К.—Лазарь Карно, его жизнь и сочинения. Тюбинген, 1894).

64. Hennet, Léon.—Lazare Carnot.—Paris, 1888. (Генне, Леон.—Лазарь Карно.—Париж, 1888).

65. Hubbard, G.—Une famille républicaine, les Carnot Paris, 1888. (Гюббар.—Республиканская семья Карно. Париж, 1888).

66. Körte, G.—Das Leben L.-N.-M. Carnot, aus den besten gedruckten, sowie aus handschriftlichen Nachrichten dargestellt. Mit einem Anhang, enthaltend die ungedruckten Poesien Carnots—Leipzig, 1820. (Кöрте, Г.—Жизнь Л.-Н.-М. Карно, составленная по лучшим печатным, а также неопубликованным материалам. С приложением стихотворений Карно.—Лейпциг, 1820).

67. Mandar, Theophile.—Notice biographique sur le général Carnot et le duc d'Otrante.—Paris, 1818. (Мандар, Теофиль.—Биографические заметки о генерале Карно и герцоге Отрантском [Жозефе Фуше].—Париж, 1818).

68. Mathiot, C.—Vie, opinions et pensées de L. Carnot.—1916. (Матьо.—Жизнь, воззрения и мысли Л. Карно.— 916).

69. Picaud, A.—Carnot, l'organisateur de la victoire. Paris, 1885. (Пико, А.—Карно, организатор победы.—Париж).

Другое издание — в 1887 г. с прилож. статьи Этьенна Шаравэй.

70. Rémonde, Charles.—Notice biographique sur le grand Carnot.—Dijon, 1880. (Ремонд, Шарль.—Биографические заметки о великом Карно.—Дижон, 1880).

71. Rioust, M. N.—Carnot.—Gand, 1817. (Риуст, М. Н.—Карно. 1817).

72. Serieys.—Carnot, sa vie politique et privée.—Paris, 1816. (Серьей.—Карно, его политическая и личная жизнь.—Париж, 1816).

73. Tissot, *P.-F.*—Mémoires historiques et militaires sur Carnot, rédigés d'après ses manuscrits, sa correspondance inédite et ses écrits.—Paris, 1824. (Тиссо, П.-Ф.—Историче-

ские и военные мемуары о Карно, составленные по его рукописям, неизданной переписке и произведениям.—Париж, 1824)

Лазарь Карно как революционер

74. Aulard, Alphonse.—Les responsabilités de Carnot — Статья в сборнике работ Альфонса Олара: Etudes et leçons sur la Révolution Française; première série. — Paris, 1905, pp. 189—211. (Олар, А.—Ответственность Карно).

75. Guillaume.—Le personnel du Comité de Salut public. (Révolution française, 1900, t. 38). (Гийом.—Состав Комитета общественного спасения).

76. Richard.—Le Comité de Salut Public et les fabrications de guerre sous la terreur.—Paris, 1921. (Ришар.—Комитет общественного спасения и производство военного снаряжения во время террора.—Париж, 1921).

Лазарь Карно в наполеоновскую эпоху

77. Wouwermans.—Napoléon et Carnot. 1888. (Вуверман.—Наполеон и Карно. 1888).

Революционная армия и Лазарь Карно

78. Bonnal.—Les armées de la République. (Бонналь.—Республиканские армии).

79. Cantal, P.—Etude sur l'armée révolutionnaire. (Канталь, П.—Трактат о революционной армии).

80. Caron, P.—Les guerres de la Révolution.— Paris, 1912. (Карон, П.—Войны революции.—Париж, 1912).

81. Chassin.—L'armée et la révolution. (Шассэн.—Армия и революция).

82. Chuquet, Arthur.—Les guerres de la Révolution, t. XI.—Paris, 1886—1896. (Шюке, Артур.—Войны революции, 11 томов.—Париж, 1886—1896).

83. Colin.—La campagne de 1793.—Paris, 1902. (Колэн.—Кампания 1793 года.—Париж, 1902).

84. Дживелегов А. К.—Армия и Конвент. Карно.—Глава VI (стр. 53—71) в книге А. Дживелегова «Армия Великой французской революции и ее вожди» («Книга», М.—Птг., 1923).

85. Hennet, Léon.—Etat militaire de France pour l'année 1793.—Paris, 1904. (Генне, Леон.—Военное положение Франции в 1793 г.—Париж, 1904).

Лазарь Карно как военный теоретик

86. Величко. Исследование новейших средств осады и обороны современных крепостей — Спб., 1890.

87. ***.—Карно. Статья в «Военной энциклопедии» (изд. т-ва И. Д. Сытина), т. XII, стр. 405—407).

88. Les institutions militaires de la France. Louvois—Carnot — Saint-Cyr. Paris, 1867. (Французские военные школы. Лувуа—Карно—Сен-Сир.— Париж, 1867).

89. Кюи, Ц.— Исторический очерк долговременной фортификации.— Спб., 1897.

90. Mathiez, A.—La victoire de l'an II.— Paris, 1916. (Матьез, А—Победа II года.—Париж, 1916).

Лазарь Карно как математик

91. Bio, J.-B.— Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la Révolution.—Paris, 1803. (Био, Ж.-Б.—Опыт истории науки во время революции. Париж,— 1803).

92. Bossut.— Histoire générale des mathématiques depuis leur origine jusqu'à l'année 1808.— Paris, 1810 (tt. 1 et 2). (Боссю.— Общая история математики от ее возникновения по 1808 г.—Париж, 1810).

93. Busse, Friedrich-Gottlieb.— Vergleichung zwischen Carnot's und meiner Ansicht der Algebra und unserer beiderseitig vorgeschlagenen Abhelfung ihrer Unrichtigkeit. — Freiburg, 1804. (Буссе.—Сравнение между взглядами на алгебру Карно и моими и совместно предложенные нами пути исправления ее неточностей.— Фрейбург, 1804).

94. Cantor, M.—Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Vierter Band (von 1759 bis 1799).—Leipzig, 1908, стр. 647—650. (Кантор, М.—Лекции по истории математики. Том 4-й [с 1759 по 1799 г.].—Лейпциг, 1908).

Страницы, посвященные Карно, принадлежат перу Виванти.

95. Тимченко, И.— Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций, т. I.— Одесса, 1900.

Varia

96. Procès du S-r M. N. Rioust, sur son ouvrage ayant pour titre: Carnot.— Gand, 1817. (Процесс г. М. Н. Риуста в связи с его сочинением, озаглавленным: Карно. 1871).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

А. П. Юшкевич. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке 5

ЛАЗАРЬ КАРНО

Размышления о философии бесконечно-малых

Глава первая

Общие принципы анализа бесконечно-малых

Определения 75
Основной принцип 85
Теорема о несовершенных уравнениях 95
Приложение общ. принципов к некоторым примерам . 99

Глава вторая

Об алгорифме, прилагаемом к анализу бесконечно-малых

О диференциальном исчислении 113
Диференциалы показательные и логарифмические . . . 116
Диференциалы тригонометрических количеств 126
Диференциалы высшего порядка 129
Приложение диференциального исчисления к некоторым примерам 132
Об интегральном исчислении 139
Приложение интегрального исчисления к некоторым примерам 152
О вариационном исчислении 160

Глава третья

Методы, которыми можно заместить анализ бесконечно-малых

О методе исчерпывания 169
О методе неделимых 174
О методе неопределенных 182
О методе первых и последних отношений или пределов 194
О методе флюксий 199
Об исчислении исчезающих количеств 204
О теории аналитических функций или производных функций 213
Общее заключение 217
Примечание, относящееся к § 162 настоящего сочинения 230

М. Э. Подгорный. Лазарь Карно — организатор военных побед революции 259

Литературный указатель 341